UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA METROPOLITANA
del Estado de Chile

Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas
y del Medio Ambiente
Departamento de Física

APUNTES CON EJERCICIOS

FÍSICA MECÁNICA

1° Edición (Versión Preliminar)

Marzo, 2012

Belisario Gutiérrez Fuentealba

Eugenio Miranda San Martín

APUNTES CON EJERCICIOS
FÍSICA MECÁNICA

GUTIÉRREZ, B.
MIRANDA, E.

Marzo, 2012

Palabras Iniciales

El material que ponemos en sus manos surge por iniciativa de los autores, para completar lo que parecía una "tarea inconclusa" luego de la publicación de "ELECTROMAGNETISMO, Problemas Propuestos y Resueltos" [1]. Ciertamente, se ha seguido un camino "en reversa", pues resulta más natural preparar primero un material instruccional escrito para el estudio de la Física General Mecánica y luego uno de Electromagnetismo (Física General) para estudiantes de ingeniería, siempre con la esperanza que resulte útil para la comprensión y dominio de los contenidos de esta área de la Física Clásica.

Con este texto, también queremos recordar a un distinguido profesor del Departamento de Física, de extraordinaria calidad humana y un referente como académico, el Profesor Walter Montecinos Flores (Q.E.P.D.), quien fue pionero en preparar material escrito para sus alumnos y publicarlo a través de Ediciones Universidad Tecnológica Metropolitana (Cf. Trabajo y Energía, Problemas Resueltos, 1997, ISBN 956-7359-09-1).

Cabe destacar que durante la selección del material que constituye el presente texto, se ha consultado y recurrido a una colección de problemas que había preparado la profesora Mg. Leda Peña Álvarez y a otra que había elaborado el Dr. Ricardo Pintanel Horta, ambos profesores del Departamento de Física de la UTEM.

Parece interesante responder la pregunta ¿por qué escribir un material impreso sobre este tema de Física Mecánica existiendo tantas fuentes de información, tales como libros, sitios de internet, guías de estudio y otras? Nuestra respuesta es: porque creemos que a través de este texto, con sus resúmenes de contenidos y problemas resueltos y propuestos, se promueve la adquisición de métodos para resolver situaciones problemáticas de Física Mecánica, dando por sentado que el aprendizaje de estrategias para la resolución de problemas es un tema actual de investigación en Enseñanza de

[1] Gutiérrez, B., Miranda, E., Velozo, A. (2010). Electromagnetismo: Problemas propuestos y resueltos. Ediciones Universidad Tecnológica Metropolitana. Santiago de Chile. 2011. Inscripción 182911, ISBN 978–956–7359–79-0.

las Ciencias, en particular de la Física [2]. Es por ello que se presentan diagramas de flujo, altamente utilizados en ingeniería, como un medio gráfico para entregar una pauta o quizás un modelo plausible para resolver algunos tipos de ejercicios, lo que a su vez permitiría simplificar y hacer más eficiente la resolución de éstos.

Nos permitimos recomendar el aprendizaje y dominio de estos "métodos" y aplicarlos intensiva y extensivamente en la resolución de problemas, hasta que el alumno descubra un método propio, que no es otra cosa que un particular protocolo a seguir cuando se enfrentan determinados problemas de Física Mecánica a resolver.

También creemos que este texto permite que el estudiante universitario pueda organizar los contenidos de Física General Mecánica con relativa facilidad, al tener "a la vista" los contenidos básicos y centrales de una asignatura que habitualmente cursa durante el primer año de la carrera. Es por ello que el texto cuenta con diferentes cuadros y tablas que reordenan cuestiones que son importantes para el estudio y aprendizaje de tales contenidos curriculares.

Nunca estará demás insistir que la clase que da el profesor es difícilmente sustituible por un libro, por una presentación "power point", por un apunte, por una charla, por un "paper", por … Vale decir, es el profesor quien entrega su personal visión y experiencia acerca de los tópicos, habilidades y estrategias propias de la asignatura que imparte y porque, en definitiva, es él quien orienta a sus alumnos en el logro de lo pedido por aquélla. Es el profesor quien incorpora o facilita la adquisición de competencias necesarias para un ingeniero.

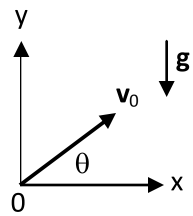
Santiago, marzo de 2012.

[2] González, A. (2009). La resolución de problemas en los cursos de mecánica básica. Lat. Am. J. Phys. EEduc. Vol. 3, Nº 2. 402-405.
Truyol, M.E., Gangoso, Z. (2010). La selección de diferentes tipos de problemas de Física como herramienta para orientar procesos cognitivos. Investigaçoes em Ensino de Ciências. Vol. 15, Nº 3. 463-484
Mogollón, E., Soto, M. (2010). (2010. Diseño y aplicación de una estrategia de resolución de problemas en la enseñanza de la Mecánica Newtoniana. Rev. Ciencias de la Educación, Segunda Etapa, Vol. 20, Nº 35.

Indice:

Algunas cantidades físicas, relaciones y unidades SI presentadas en Física Mecánica

Cantidad Física	Relación(es) Cuantitativa(s)	Unidad SI
Rapidez media (v_m)	$v_m = \dfrac{d}{t}$	m/s
Vector posición ($\vec{r}$) Velocidad media ($\vec{v}_m$) Velocidad instantánea ($\vec{v}$) Aceleración instantánea ($\vec{a}$)	$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	m m/s m/s² m/s
Componentes escalares de la velocidad en la dirección x (v_x), y (v_y),y z (v_z), Magnitud (instantánea) de la velocidad o rapidez instantanea (v)	$v_x = \dfrac{dx}{dt}; v_y = \dfrac{dy}{dt}; v_z = \dfrac{dz}{dt}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	m/s m/s
MRUA Velocidad ($\vec{v}$) Velocidad inicial ($\vec{v}_0$) Componente escalar de la velocidad en la dirección x (v_x) Aceleración ($\vec{a}$) Componente escalar de la aceleración en la dirección x (a_x)	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ $v_x = v_{0x} + a_x t$ $x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$ $x = x_0 + \dfrac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot t$ $2a_x(x - x_0) = v_x^2 - v_{0x}^2$	m/s m/s²
Lanzamiento vertical y $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j} = -9{,}8\,\hat{j}\left[m/s^2\right]$	$v_y = v_{0y} + a_y t$, con $a_y = -9{,}8\left[m/s^2\right]$ $y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}$ $y = y_0 + \dfrac{v_{0y} + v_y}{2} \cdot t$ $2a_y(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$	m/s, m/s²

Proyectiles 	$v_{0x} = v_0 \cos\theta$. $v_{0y} = v_0 sen\theta$ $v_x = v_{0x}$ $v_y = v_{0y} - gt$ $x = v_{0x}t$ $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$	m, m/s, m/s^2
Fuerza neta 2° Ley de Newton	$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$	N
Ley de Gravitación Universal	$\left\|\vec{F}_{12}\right\| = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}$ $G = 6,67 \times 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right]$	N
Trabajo	$W = \vec{F} \bullet \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\phi$	J
Potencia Media Potencia Instantánea	$\overline{P} = \frac{W}{t}$ $P = \frac{dW}{dt}$	W
Energía Cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$ $W_{neto} = K_2 - K_1$ (Teorema del Trabajo y la Energía)	J
Energía Potencial Gravitatoria	$U_g = mgy$	J
Fuerza de restitución de un resorte ideal	$F = -kx$	N
Energía Potencial Elástica	$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$	J
Momento Lineal	$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{p}_{sistema} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$ (para un sistema de partículas aislado) $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ (principio de conservación del momentum)	kg·m·s^{-1}
Impulso	$\vec{I} = \vec{F}t$ $\vec{I}_{neto} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$	N·s

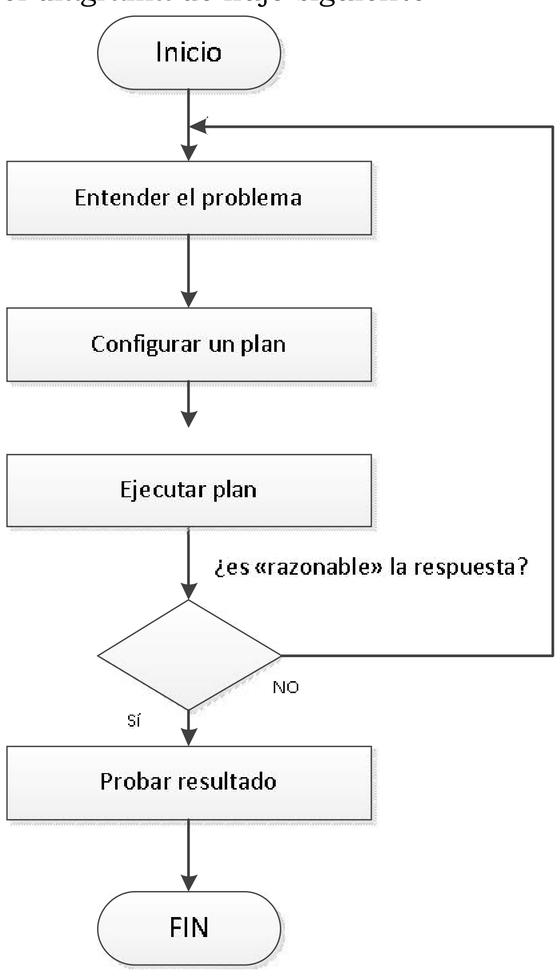
Coeficiente de restitución (colisiones)	$e = -\dfrac{V_{2f} - V_{1f}}{V_{2i} - V_{1i}}$	
Período	$T = \dfrac{1}{f}$	s
Fuerza centrípeta	$F_c = \dfrac{mv^2}{R}$	N
Rapidez ("velocidad") angular	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	rad/s
Aceleración angular	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	rad/s²
Expresiones para un movimiento con aceleración angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ $\theta = \theta_0 + \left(\dfrac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$ $2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2$	
Momento de fuerza	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	m·N
Momento de inercia	$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$ $I = \int_a^b r_i^2 dm$	kg·m²
Trabajo rotacional	$dW = \tau d\theta$	J
Energía cinética rotacional	$K = \dfrac{1}{2} I_0 \omega^2$	J
Potencia rotacional	$P = \tau\omega$	W
Momentum angular	$l = I_0 \omega$	kg·m²/s
Segunda ley de Newton rotacional	$\vec{\tau}_{neta} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$ $\vec{\tau}_{neta} = I\vec{\alpha} \quad (I = cte)$	m·N
M.A.S.	$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$ $x = A\cos(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	

Diagramas de flujo

En este texto, se sugieren algunos “pasos” para resolver problemas típicos de Física Mecánica. En este caso se utilizan ***diagramas de flujo (Ddf)*** para explicar los procesos y pasos que permiten plantear y resolver situaciones problemáticas, para lo cual es conveniente tener presente la siguiente simbología:

Símbolo	**Descripción**
	Inicio o termino de un proceso
	Ingreso de Datos
	Proceso
	Subproceso
	Decisión

A modo de ejemplo, se mostrarán los pasos para resolución de problemas utilizando el diagrama de flujo siguiente



Comienza siempre con “inicio”

Primer proceso, “entender el problema”

Segundo proceso, “configurar un plan”

Tercer proceso, “ejecutar plan”

Llega a un punto de decisión: ¿es “razonable” la respuesta? Si la respuesta es afirmativa avanza al cuarto proceso. Si la respuesta es negativa, vuelve al inicio.

Cuarto proceso, “probar resultado”

Termina el problema.

1 Algunos Antecedentes previos

1.1 Sistema Internacional (SI)

Al describir cuantitativamente un fenómeno físico, lo que implica realizar una medición, se requiere expresar el resultado en una unidad de validez internacional. Es por ello que se recurre al Sistema Internacional de Unidades (SI), el cual fue creado en 1920 por la Conferencia General de Pesos y Medidas.

En el caso chileno son relevantes los organismos Instituto Nacional de Normalización (INN) y la Red Nacional de Metrología (RNM) en garantizar las mediciones, que se realizan en el país y lograr el reconocimiento internacional de estas.

1.1.1 Unidades fundamentales

Constituyen la base del Sistema Internacional de Unidades, de modo que a partir de éstas se pueden escribir las otras unidades, denominadas derivadas. Las unidades fundamentales se indican en la siguiente tabla:

Magnitud	***Unidad***	***Símbolo***
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

1.1.2 Unidades derivadas

Las unidades derivadas se forman a partir de la combinación de las unidades básicas utilizando las definiciones operativas de la Física. En la siguiente tabla se muestran algunas unidades compuestas y utilizadas en este trabajo:

Magnitud	**Nombre**	**Símbolo**	**Expresión**
Superficie	Metro cuadrado	m^2	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3	m^3
Velocidad	Metro por segundo	m/s	m/s
Aceleración	Metro por segundo cuadrado	m/s^2	m/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	rad/s	rad/s
Aceleración angular	Radián por segundo cuadrado	rad/s^2	rad/s^2
Frecuencia	Hertz	Hz	$1/s = s^{-1}$
Fuerza	Newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energía	Joule	J	N·m

1.1.3 Notación Científica:

Se usan en Física prefijos para indicar cifras muy grandes o muy pequeñas. Los más utilizados son:

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	Kilo	K
10^{2}	Hecto	H
10	Deca	D
10^{-1}	Deci	d
10^{-2}	Centi	c
10^{-3}	Mili	m
10^{-6}	Micro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p

Por ejemplo: 6[cm] corresponden a $6x10^{-2}$[m], 3[ms] corresponde a $3x10^{-3}$[s], 12[kN] son $12x10^{3}$[N] y 2500[g] son $2,500x10^{3}$[g] o 2,500[kg].

1.1.4 Transformación de unidades

Un método sencillo para transformar unidades consiste en multiplicar "convenientemente" por uno (1), de tal forma que la unidad que no interesa se simplifique y quede sólo la que nos interesa. Así una forma conveniente de escribir "1" es $\frac{1000}{1}\left[\frac{g}{kg}\right]=\frac{1[kg]}{1[kg]}=1$; otro caso lo constituiría $\frac{1}{3600}\left[\frac{h}{s}\right]=\frac{1[h]}{1[h]}=1$.

Ejemplo 1.1.4: Transformar:

a) $432\left[\frac{km}{h}\right]$ a $\left[\frac{m}{s}\right]$

$$432\left[\frac{km}{h}\right]=432\left[\frac{km}{h}\right]\times\frac{1000}{1}\left[\frac{m}{km}\right]\times\frac{1}{3600}\left[\frac{h}{s}\right]=120\left[\frac{m}{s}\right]$$

b) $100\left[cm^3\right]$ a $\left[m^3\right]$

Conviene tener presente que

$$1\left[m^3\right]=1[m]\times1[m]\times1[m]=100[cm]\times100[cm]\times100[cm]=10^6[cm].$$

Luego,

$$100\left[cm^3\right]=100\left[cm^3\right]\frac{1}{10^6}\left[\frac{m^3}{cm^3}\right]=10^{-4}\left[m^3\right]$$

c) $4,2\times10^6\left[\frac{J\cdot cm}{s}\right]$ a $\left[\frac{J\cdot m}{h}\right]$

$$4,2\times10^6\left[\frac{J\cdot cm}{s}\right]=4,2\times10^6\left[\frac{J\cdot cm}{s}\right]\times\frac{1}{100}\left[\frac{m}{cm}\right]\times\frac{3600}{1}\left[\frac{s}{h}\right]=1,5\times10^8\left[\frac{J\cdot m}{h}\right]$$

Ejercicios Propuestos

01) Use los prefijos que considere más adecuados para escribir en su forma más simple los valores siguientes:

a) $9{,}2 \times 10^{-12}$ [A]
b) $4{,}8 \times 10^{-6}$ [m]
c) 0,000.000.6 [s]
d) $1{,}3 \times 10^{12}$ [m]
e) $2{,}9 \times 10^{8}$ [m]
f) 1.260.000.000 [m]
g) $9{,}2 \times 10^{-12}$ [s]
h) $67{,}9 \times 10^{-4}$ [m]
i) $4{,}8 \times 10^{9}$ [kg]

02) Realice las siguientes conversiones de unidades

a) $1{,}5\left[\frac{g}{cm^3}\right]$ a $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

b) $360\left[\frac{cm}{s}\right]$ a $\left[\frac{km}{h}\right]$

c) $20\left[\frac{km}{h^2}\right]$ a $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

d) $432\left[\frac{g \cdot mm}{s^2}\right]$ a $[N]$

e) $1[\text{año luz}]$ a $[m]$ (Sugerencia: Un año luz, es la distancia que recorre la luz, en un año a una rapidez de $3\times10^8\left[\frac{m}{s}\right]$)

03) En las transformaciones siguientes, todos los prefijos han sido utilizados erróneamente y, en algunos casos pueden haber también errores de cálculo. En cada situación, identifique el o los errores cometidos y escriba correctamente la transformación.

a) $5{,}2 \times 10^{-3}$ mm = 5,2 mmm
b) 0,000.000.27 s = 27 cs
c) 0,000.000.000.302 A = 302GA
d) 678.000.000.000 m = 6,78 hGm
e) 2.500.000 K = 25 MK
f) 0,007 mol = 7 μmol
g) $1m^2 = 100\ cm^2$
h) $1\ m^3 = 1000\ cm^3 = 1\ Gmm^3$

1.2 Ángulos:

Los sistemas de medida de los ángulos, dividen a la circunferencia completa en:

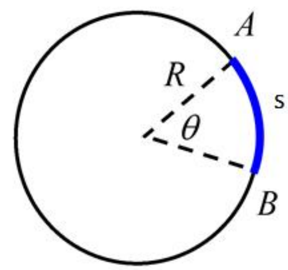
Sistema Sexagesimal	360° (grados)
Sistema circular	2π (radianes)

Para transformar de un sistema a otro se usa la proporción:

$$\frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\alpha_{rad}}{\pi_{rad}}$$

Además, para un ángulo del centro

$$\theta = \frac{s}{R}[rad]$$



donde:

R = radio de la circunferencia.
θ= ángulo comprendido en el arco, medido en radianes.
s = Longitud del arco AB

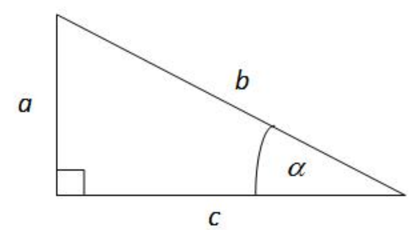
1.3 Trigonometría

Las funciones trigonométricas principales para un triángulo rectángulo son

$$sen\ \alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

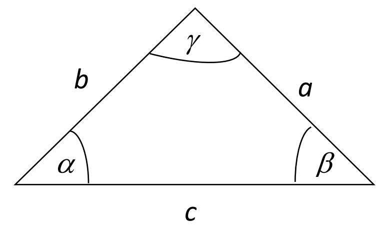
$$\tan\ \alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \frac{a}{c}$$



α	Sen α	Cos α	Tan α
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Indef.
180°	0	-1	0

Para un triángulo cualquiera ABC, son válidos el teorema del coseno o teorema general de Pitágoras y el teorema del seno, el cual se puede escribir como

$$\frac{sen\ \alpha}{a}=\frac{sen\ \beta}{b}=\frac{sen\ \gamma}{c}$$



En el caso del teorema del coseno se puede escribir cualquiera de las siguientes expresiones

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

También puede ser útil "tener a mano" las siguientes identidades trigonométricas:

$$sen(\alpha\pm\beta)=sen\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\ sen\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp sen\alpha\ sen\beta$$
$$sen^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

1.4 Circunferencia y Círculo

Área del círculo: $A=\pi r^2=\dfrac{\pi d^2}{4}$

Perímetro de la circunferencia: $P=2\pi r=\pi d$

Área sector circular: $A=\pi r^2\dfrac{\alpha}{360°}$

1.5 Ecuación de segundo grado:

Dada la ecuación algebraica de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

Las dos soluciones de ella son:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Como se trata de un polinomio de segundo grado, las soluciones pueden ser ambas reales o las dos imaginarias.

1.6 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dado el sistema lineal de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right|$$

este se puede resolver utilizando el método de Kramer, de la forma

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{21}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Para que el sistema tenga solución, el número de ecuaciones independientes debe ser igual al número de incógnitas de sistema.

Ejemplo 1.1 Una partícula, que se mueve sobre el eje *x* con aceleración constante de 2[m/s^2], se encuentra a 11[m] del origen en t = 2[s] y a 41 [m] del origen en t = 5[s]. Determine la posición y rapidez inicial de la partícula.

<u>Solución</u>

Dado que la partícula se mueve con aceleración constante, su posición puede expresarse como

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Como $a = 2[m/s^2]$ $\quad x(2) = 11[m]$ y $x(5) = 41[m]$

Al reemplazar estos valores se halla

$$x(2) = 11 = x_0 + v_0(2) + \frac{1}{2}2(2)^2 \tag{1}$$

$$x(5) = 41 = x_0 + v_0(5) + \frac{1}{2}2(5)^2 \tag{2}$$

Reordenando las ecuaciones (1) y (2), se tiene un sistema de dos incógnitas con dos ecuaciones.

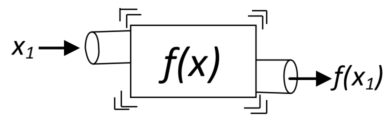
$$\left.\begin{array}{r} 7 = x_0 + 2v_0 \\ 16 = x_0 + 5v_0 \end{array}\right|$$

Para resolver el sistema se puede utilizar las reglas de Kramer, de modo que

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{32-35}{2-5} = 1[m] \qquad v_0 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 16 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7-16}{2-5} = 3[m/s]$$

1.7 Funciones

Una función es una relación que transforma un elemento de entrada (variable independiente) en sólo un elemento de salida (variable dependiente).



Una función puede escribirse de la forma $y = f(x)$, donde x es la variable independiente e y la dependiente. Por ejemplo:

$$y = f(x) = 2x + 3$$

$$v = g(t) = 5t + 4$$

$$x = h(t) = 5 + 7t - 5t^2$$

1.7.1 Función lineal

Una función lineal tiene la forma:

$$y = f(x) = mx + b$$

es decir, se trata de un polinomio de primer orden por estar "x" elevado a "1".

Geométricamente una función lineal se representa en el plano como una línea recta, donde m es la pendiente de la recta y b es el punto donde la recta corta al eje y, denominado coeficiente de posición o intercepto

Dados los puntos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$, se puede determinar la ecuación de la recta, a través de

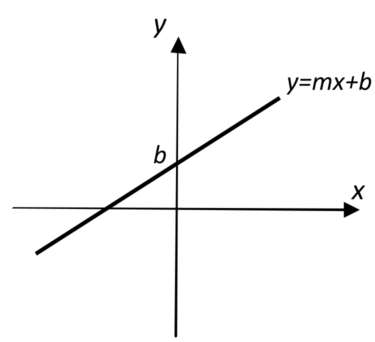
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y

$$y_2 = m \cdot x_2 + b$$

$$b = y_2 - m \cdot x_2$$

$$b = y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot x_2$$



1.7.2 Función cuadrática

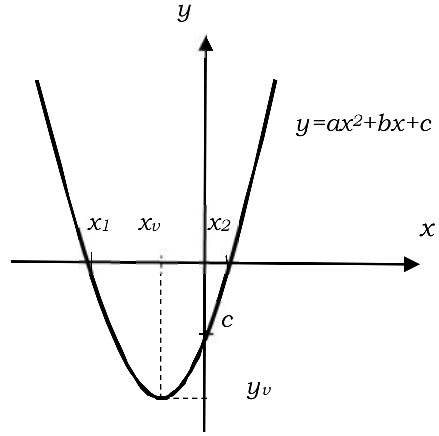
Una función cuadrática de la forma:

$$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

vale decir, se trata de un polinomio de segundo grado en "x"

Geométricamente, esta función representa una parábola en el plano cartesiano.

Conocida la ecuación de la parábola, se pueden determinar las siguientes características:



a) Dirección en la que se abre

Si A>0, entonces la parábola se abre hacia arriba ($\cup$).
Si A<0, entonces la parábola se abre hacia abajo ($\cap$).

b) Coordenadas del vértice (punto más alto más bajo)

$$x_v = -\frac{B}{2A}$$

$$y_v = f(x_v) = f\left(-\frac{B}{2A}\right)$$

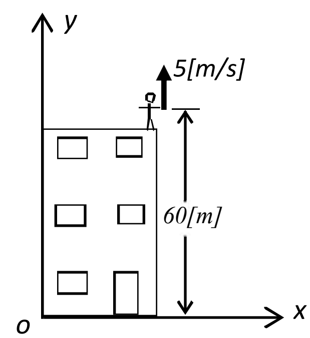
c) Intersección con los ejes

Para determinar la intersección con el eje y, se debe hacer *x=0*. Luego la parábola intersecta al eje *"y"* en *y=c.*

Para determinar la intersección con el eje x, se debe hacer y=0, luego la parábola intersecta al eje x en las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Ejemplo 1.2 Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial de 5,0m/s, desde una altura de 60m. Determine la altura máxima que alcanza la piedra y el tiempo que tarda en caer al piso.



Solución

El movimiento de la piedra puede ser descrito por una función cuadrática, de la forma:

$$y(t) = y_0 + v_{o_y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

donde :

y_0 es la posición inicial de la piedra.
v_0 es la rapidez inicial de la piedra en la dirección *y*.
a_y es la aceleración de gravedad, dirigida siempre al centro de la tierra.

Reemplazando los valores dados en el enunciado del problema y considerando el suelo como origen del sistema de referencia, queda:

$$y(t) = 60 + 5t - \frac{1}{2}10t^2 = 60 + 5t - 5t^2$$

En este caso, A=-5, B=5 y c=60.

Dado que el elemento que acompaña a t^2 es negativo (-5), la parábola se abre hacia abajo, de modo que la altura máxima que alcanza la piedra, puede hallarse determinando las coordenadas ($t_{ymán}$; $y_{máx}$) del vértice de la parábola. Así:

$$t_{y_{máx}} = -\frac{B}{2A} = -\frac{5}{2(-5)} = 0,5[s]$$

$$y(t_{y_{máx}}) = 60 + 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}10\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 61,3[m]$$

La altura máxima que alcanza la piedra es 61,3[m].

El tiempo que tarda la piedra en caer al piso, se determina igualando a cero la función de posición, con lo cual queda la ecuación de segundo grado:

$$0 = 60 + 5t - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuya solución se obtiene de:

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4\cdot 5\cdot 60}}{2\cdot(-5)}$$

$$t = -3,0[s] \quad \vee \quad t = 4,0[s]$$

Como la primera solución no tiene sentido físico, pues el movimiento hacia arriba de la piedra comienza en t=0, el tiempo que tarda en caer la piedra es de 4,0[s]

Ejemplo 1.3 Un maleante, viaja en un automóvil con una rapidez de 60[km/h] en una zona residencial. Cuando pasa frente a una motocicleta de carabineros, este sigue al delincuente partiendo del reposo con una aceleración de 160[km/h^2]. Para la situación planteada:

a) Dibuje una gráfica de posición v/s tiempo para ambos móviles.
b) Determine el tiempo que tarda el policía en alcanzar al delincuente.
c) La rapidez que lleva el policía al momento de alcanzar al delincuente.

Solución

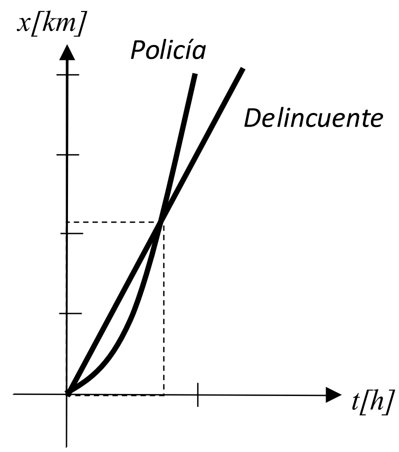
a) A partir de "consideraciones físicas" se encuentra que la ecuación que representa el movimiento del delincuente en términos de su posición es

$$x_D(t) = v_d t = 60t$$

Análogamente la posición del policía está dada por

$$x_P(t) = \frac{1}{2}a_P t^2 = 80t^2$$

El gráfico adjunto muestra la posición del policía y del delincuente en función del tiempo.



b) Para determinar el tiempo que tarda el policía en coger al delincuente, se debe encontrar las coordenadas del punto donde se intersectan las curvas del gráfico anterior. Matemáticamente esto se puede hallar igualando las ecuaciones que representan ambas curvas y despejando el tiempo. Entonces,

$$x_D(t) = x_P(t)$$

$$60t - 80t^2 = 0$$

$$(60 - 80t)t = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$t = 0$$

$$t = 0,75[h]$$

El tiempo que tarda el policía en pillar al delincuente es 0,75[h] o 45[min].

c) La rapidez que lleva el policía se determina mediante la relación

$$v_P(t) = a_P t = 160t$$

$$v_P(0,75) = 160 \cdot 0,75 = 120[km/h]$$

Luego la rapidez velocidad del policía al momento de alcanzar al delincuente es de 120[km/h]. Note que esta rapidez es el doble de la rapidez que lleva el delincuente ¿siempre ocurre esto?

1.8 Derivadas

En términos muy sencillos puede afirmarse que la derivada corresponde a la determinación de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Dada la función continua de una variable, como la que se muestra en la figura

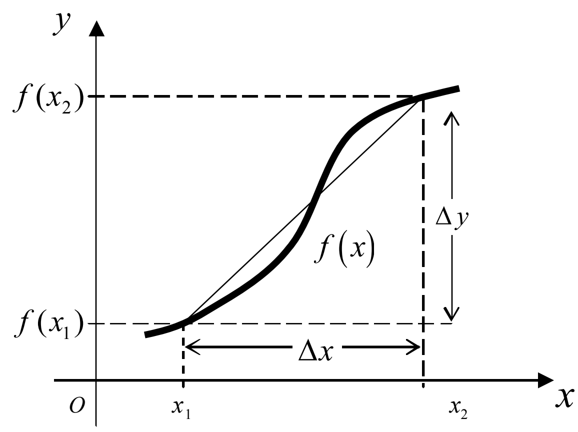
$$y = f(x)$$

La pendiente entre los puntos *(x_1; $f(x_1)$)* y *(x_2; $f(x_2)$)* es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La derivada $\frac{dy}{dx}$, equivale a hacer Δx infinitesimalmente pequeño, es decir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, se puede escribir la derivada de la función en el punto x_1 como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

1.8.1 Propiedades

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x))=c\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d(f(x))}{dx}+\frac{d(g(x))}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=g(x)\frac{d(f(x))}{dx}+f(x)\frac{d(g(x))}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)))=\frac{d(f(g(x)))}{dx}\frac{d(g(x))}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

1.8.2 Derivadas de algunas funciones

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)=ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ax^n\right)=anx^{(n-1)x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(sen\left(ax\right)\right)=a\cos(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos\left(ax\right)\right)=-asen(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan\left(ax\right)\right)=a\sec^2(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln ax\right)=\frac{1}{x}$$

Ejemplo 1.4 Determinar la de derivada respecto de t de las siguientes funciones:

a.- $x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

b.- $y(t)=\frac{t^2}{(t+x)^3}$

<u>Solución</u>

a.-

$$\frac{dx(t)}{dt}=at+v_0$$

b.- La función puede escribirse como $y(t)=t^2\left(t+x\right)^{-3}$, de modo que

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left(t+x\right)^{-3}\frac{d}{dt}t^2+t^2\frac{d}{dt}\left(t+x\right)^{-3}=2t\left(t+x\right)^{-3}+t^2\left(-3\left(t+x\right)^{-4}\right)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{t(2x-t)}{\left(t+x\right)^4}$$

Ejemplo 1.5 Un carrito que se mueve a control remoto, se mueve en plano *xy* partiendo desde el origen del plano cartesiano. Las coordenadas *x* e *y* (medidas en metros) varían con el tiempo *t* (medido en segundos) según:

$$x(t) = 3 - 0,5t^2$$

$$y(t) = t + 0,75e^{-2t}$$

Determine las coordenadas del carrito y su distancia respecto al origen de coordenadas en t = 1,0[s] además de su velocidad instantánea y su aceleración instantánea en ese mismo tiempo.

Solución

Para conocer las coordenadas del carrito, se debe reemplazar el valor del tiempo dado en las relaciones de las coordenadas:

$$x(1) = 3 - 0,5(1)^2 = 2,5[m]$$

$$y(1) = 1 + 0,75e^{-2(1)} = 1,1[m]$$

El carrito se encuentra en el punto (2,5 ; 1,1)[m]

La distancia respecto al origen de coordenadas corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 2,5 y 1,1, entonces:

$$d = \sqrt{(2,5)^2 + (1,1)^2} = 2,7[m]$$

Dado que el carrito se mueve en dos dimensiones, se debe determinar su velocidad para cada dimensión por separado,

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -t$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 1 - 1,5e^{-2t}$$

En Física v_x y v_y pueden denominarse "componentes escalares de la velocidad" en la dirección x e y respectivamente. Luego en el instante t=1[s] la velocidad en cada componente es:

$$v_x(t) = -1,0[m/s]$$

$$v_y(1) = 1 - 1,5e^{-2(1)} = 0,80[m/s]$$

La magnitud del vector velocidad es:

$$\left|\vec{v}(1)\right| = \sqrt{(-1,0)^2 + (0,80)^2} = 1,3[m/s]$$

Esta velocidad forma un ángulo α, respecto al eje *x*, de:

$$\alpha = 180 + \text{Arctan}\left(\frac{0,80}{-1}\right) = 141,3°$$

O $$\alpha = 180 - \text{Arctan}\left(\frac{0,80}{1}\right) = 141,3°$$

O $$\alpha = 90 + \text{Arctan}\left(\frac{1}{0,80}\right) = 141,3°$$

La aceleración en cada eje es:

$$a_x(1) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -1,0\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_y(1) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 3e^{-2(1)} = 0,41\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

En Física a_x y a_y pueden denominarse "componentes escalares de la aceleración" en la dirección x e y respectivamente.
El vector aceleración tiene una magnitud:

$$\left|\vec{a}(1)\right| = \sqrt{(-1)^2 + (0,41)^2} = 1,1\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Y forma un ángulo β respecto al eje x de:

$$\beta = 180 + Arc\tan\left(\frac{0,406}{-1}\right) = 157,7°$$

O $$\beta = 180 - Arc\tan\left(\frac{0,406}{1}\right) = 157,7°$$

O $$\beta = 90 + \text{Arctan}\left(\frac{1}{0,41}\right) = 157,7°$$

Ejemplo 1.6 Un cuerpo sometido solo a una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento desde su eje de equilibrio, se moverá describiendo un movimiento armónico simple que puede ser descrito mediante la expresión

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde A es la amplitud del movimiento, ω es la frecuencia angular y ϕ la fase inicial. Determine las funciones velocidad instantánea y aceleración instantánea. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad máxima del movimiento? ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima del movimiento?

<u>Solución</u>

Conocida la función posición instantánea dependiente del tiempo, es posible encontrar v_x derivando la función posición respecto del tiempo, así:

$$v_x(t) = \frac{d(x(t))}{dt} = \frac{d(A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi))}{dt} = -A\cdot\omega\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \phi)$$

Y conocida v_x, es posible encontrar a_x así

$$a_x(t) = \frac{d(v(t))}{dt} = \frac{d(-A\cdot\omega\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \phi))}{dt} = -A\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi)$$

Las funciones seno y coseno oscilan entre los valores máximos de 1 y -1, luego:

$$v_{x,máx} = A\cdot\omega$$

$$a_{x,máx} = A\cdot\omega^2$$

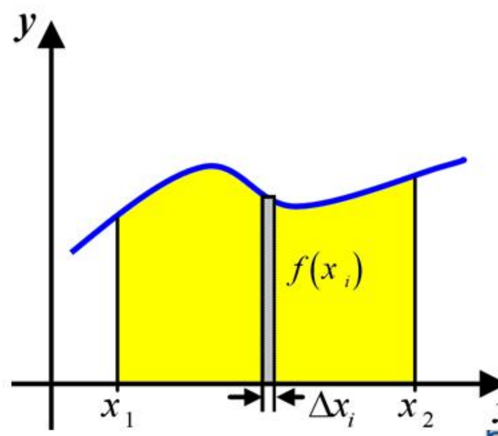
1.9 Integrales

En principio, la integración de una función *f(x)* es el proceso inverso de la derivación de una función *F(x)*, en efecto,

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

puesto que

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x)$$



En términos sencillos y para los casos que son de interés en un primer curso de Física, puede afirmarse que para una función continua *f(x)*, su integral corresponde al área entre la curva y el eje *x*, en el intervalo limitado por x_1 y x_2

El pequeño elemento de área marcado en la figura adjunta es aproximadamente $f(x_i)\Delta x_i$. Si se suman todos los "pedacitos" (elementos) de área desde x_1 a x_2 y Δx_i se hace infinitesimalmente pequeño, se obtiene exactamente el área bajo la curva de *f(x)*, entre x_1 y x_2

$$Area = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f\left(x_i\right)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

1.9.1 Propiedades

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

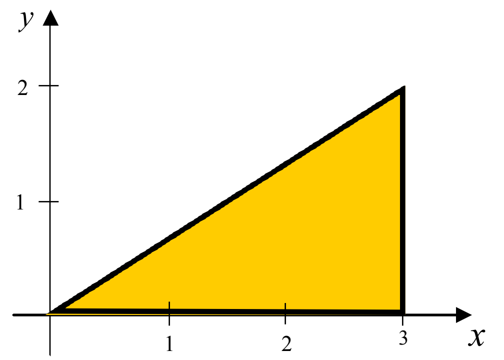
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}sen\left(ax\right)$$

$$\int sen(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos\left(ax\right)$$

Ejemplo 1.7 Determinar el área "encerrada" en la figura adjunta

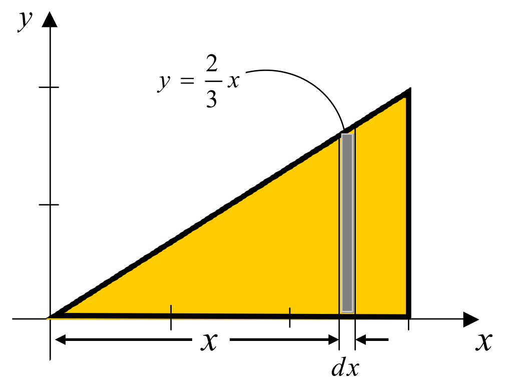


Solución

Como la figura adjunta corresponde a un triángulo rectángulo, el área se determina con

$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Un segundo método para hallar el área pedida se obtiene a partir del enfoque del cálculo integral. Para ello se elige un pequeño elemento de área *dA* a una distancia *x* del origen, de ancho *dx* y cuya altura está dada por *y=2/3x*. Así, el área del pequeño elemento de área es



$$dA = \frac{2}{3}xdx$$

Al sumar todos los pequeños elementos de área, se obtiene el área total, lo que equivale a integrar desde cero hasta tres con lo que se obtiene:

$$A = \int_0^3 \frac{2}{3}xdx = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3$$

$$A = \frac{3^2}{3} = 3$$

Ejercicios Propuestos

Determine las siguientes integrales

a) $\int_0^{t_1} (v_0 + at)dt$

b) $\int_{x_1}^{x_2} -k \cdot x \cdot dx$

c) $\int_{-h}^{L-h} \frac{m}{L}x^2 dx$

d) $\int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi rLdr)$

2 Escalares y Vectores [1]

Para describir fenómenos naturales y específicamente físicos, es necesario hacerlo a través de variables físicas que logran representar magnitudes, que al dimensionarlas permiten conocer más profundamente, ya sea, su comportamiento, o el estado en que se encuentra el evento a describir.

Existen magnitudes de tipo **ESCALARES** y de tipo **VECTORIALES**.

2.1 Magnitudes Escalares:

Son magnitudes físicas que quedan completamente definidas sólo con su módulo o magnitud más la unidad de medida. Ejemplos de ellas son: longitud, área, tiempo, rapidez, energía, trabajo. Así, la energía cinética de un cuerpo queda completamente definida si se conoce la masa m del cuerpo y su rapidez v, a partir de la expresión:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ [Joule]}$$

Las operaciones con escalares se realizan igual que con números usuales, teniendo la precaución de utilizar las unidades de medida como valores algebraicos, por ejemplo:

$$1[m] + 2[m] = 3[m]$$

$$1,0[m] + 20[cm] = 1,0[m] + 0,2[m] = 1,2[m]$$

$$1[m] \cdot 2[m] = 2[m^2]$$

$$1,0[m] \cdot 20[cm] = 1,0[m] \cdot 0,2[m] = 0,2[m^2]$$

2.2 Magnitudes Vectoriales:

Son magnitudes físicas que están completamente definidas cuando se da su magnitud, dirección y sentido, además de su unidad de medida. Ejemplos de éstas son: velocidad, aceleración, fuerza, momentum (cantidad de movimiento), torque.
Para dar estas "tres informaciones" los vectores se representan mediante un trazo dirigido (flecha), donde:

- La **magnitud** del vector está dado por la longitud de la flecha.
- La **dirección** viene dada por un referente angular respecto de un eje de referencia, o bien, mediante la recta que lo contiene.
- El **sentido** es el dado por la flecha y corresponde a una orientación geográfica, de posición o por una orientación respecto de una recta numérica o sistema de coordenadas rectangulares, por posiciones espaciales, arriba, abajo, izquierda, derecha, atrás, delante, etc.

Luego, para que dos vectores sean iguales, sus tres características deben ser iguales, es decir, dos vectores son iguales cuando tienen igual magnitud o módulo, igual dirección e igual sentido.

[1] Con la colaboración del profesor Voltaire Fuentes Olave, Departamento de Física Universidad Tecnológica Metropolitana.

Además es importante cuando se trata un vector marcar su condición y así poder diferenciarlo de una unidad escalar, para ello se pone una flecha sobre el nombre del vector $\vec{V}$ o se marca el nombre del vector en negrita ***V***

Por ejemplo para el vector $\vec{a}$ de la figura se puede escribir,

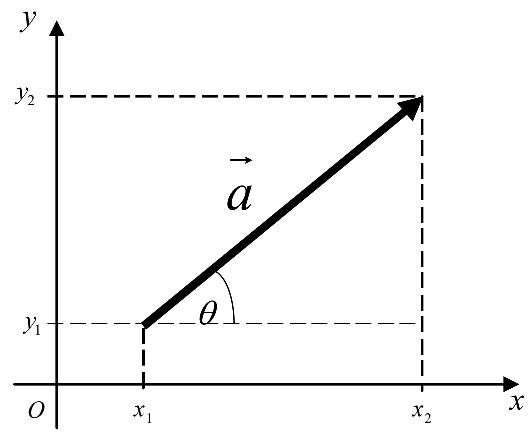
Módulo o magnitud de $\vec{a}$

$$\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

$$sen\theta = \frac{y_2 - y_1}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow y_2 - y_1 = \left|\vec{a}\right| sen\theta$$

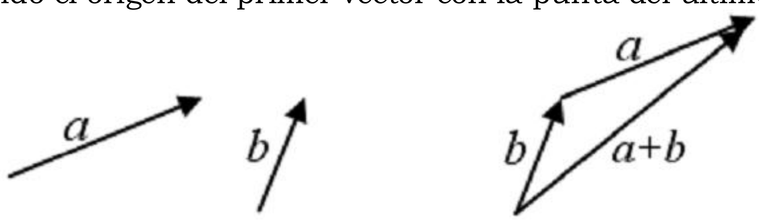
$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow x_2 - x_1 = \left|\vec{a}\right| \cos\theta$$



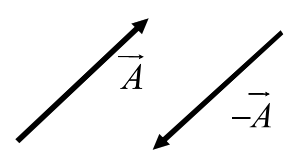
Si el vector se ha trazado desde el origen O del sistema de coordenadas, entonces x_1 e y_1 son iguales a cero

2.2.1 Suma de vectores (método gráfico)

Los vectores se colocan de forma que la punta o extremo de uno coincida con el origen del siguiente vector (sin que pierdan ninguna de sus características). El vector suma se obtiene uniendo el origen del primer vector con la punta del último.



2.2.2 Inverso de un vector y resta entre vectores



El inverso de un vector $\vec{a}$ corresponde a otro vector de igual magnitud y dirección, pero sentido opuesto.

A partir del inverso de un vector se puede escribir la resta entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, como la suma entre $\vec{a}$ y el inverso de $\vec{b}$, es decir:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

2.2.3 Multiplicación de un vector por un escalar:

Al multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar *c*, si *c* es positivo, no afecta el sentido y $c\vec{a}$ tiene la misma dirección que $\vec{a}$ y magnitud $c\left|\vec{a}\right|$. Si *c* es negativo, solo se invierte el sentido del vector, quedando la dirección y magnitud iguales para cuando *c* es positiva.

Por ejemplo: se puede conocer la fuerza $\left(\vec{F}\right)$ que se ejerce sobre una masa(m), conocido el vector aceleración $\left(\vec{a}\right)$ de la masa, como: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Para expresar un vector en su forma canónica, se definen tres vectores unitarios (de magnitud uno) en la dirección de cada eje cartesiano:

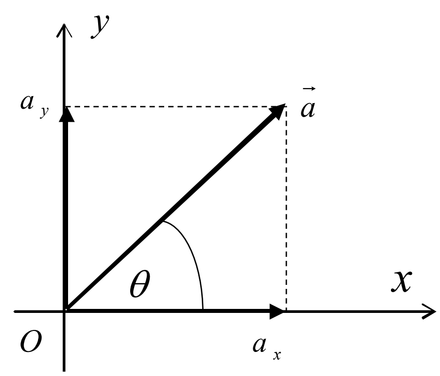
Para el eje x: $\hat{i} = (1,0,0)$

Para el eje y: $\hat{j} = (0,1,0)$

Para el eje z: $\hat{k} = (0,0,1)$

También suele emplearse: $\hat{x} \equiv \hat{i}$, $\hat{y} \equiv \hat{j}$, $\hat{z} \equiv \hat{k}$

2.2.4 Componentes de un vector



Cualquier vector puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$. Así, para un vector en dos dimensiones sus componentes escalares pueden escribirse como:

$$a_x = \left|\vec{a}\right| \cos\theta = a\cos\theta$$

$$a_y = \left|\vec{a}\right| sen\theta = a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Y el vector se expresa finalmente como:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

Si se considera un vector cualquiera, este se puede escribir como:

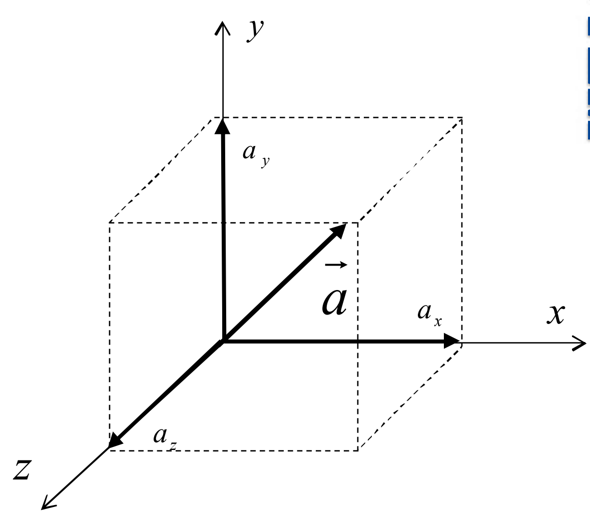
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

En este caso su magnitud se obtendrá como

$$\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

La dirección de $\vec{a}$ estará dada por los cosenos directores, a saber

Respecto del eje *x*: $\alpha = arc\cos\left(\dfrac{a_x}{a}\right)$



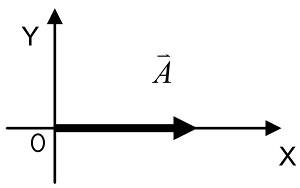
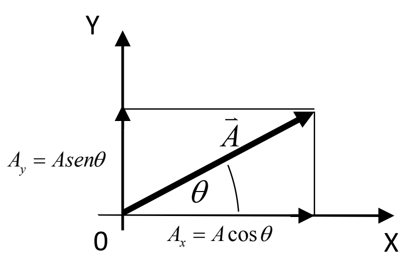
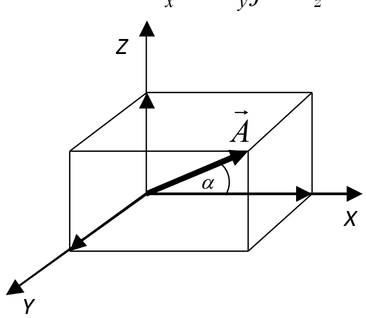
Respecto del eje *y*: $\beta = arc\cos\left(\dfrac{a_y}{a}\right)$

Respecto del eje *z*: $\gamma = arc\cos\left(\dfrac{a_z}{a}\right)$

En la figura el sentido de $\vec{a}$ está orientado hacia el primer cuadrante espacial o sobre el plano XY.
Puede demostrarse que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2.2.5 Tabla resumen vectores

Vector	Módulo	Dirección	Sentido
Unidimensional $\vec{A} = A_x\hat{i}$ 	A_x	0° respecto del eje X	sentido positivo de X
Bidimensional $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ 	$\lvert\vec{A}\rvert = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}$	$\theta = arctg\left[\dfrac{A_y}{A_x}\right]$	primer cuadrante.
Tridimensional $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ 	$\lvert\vec{A}\rvert = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$	Respecto del eje *x*: $\alpha = arc\cos\left(\dfrac{a_x}{a}\right)$ Respecto del eje *y*: $\beta = arc\cos\left(\dfrac{a_y}{a}\right)$ Respecto del eje *z*: $\gamma = arc\cos\left(\dfrac{a_z}{a}\right)$	primer cuadrante espacial (primer octante)

2.2.6 Suma de vectores (método de las componentes)

Sean los vectores

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

La suma de ambos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se expresa como:

$$\vec{a}+\vec{b} = \left(a_x + b_x\right)\hat{i} + \left(a_y + b_y\right)\hat{j} + \left(a_z + b_z\right)\hat{k}$$

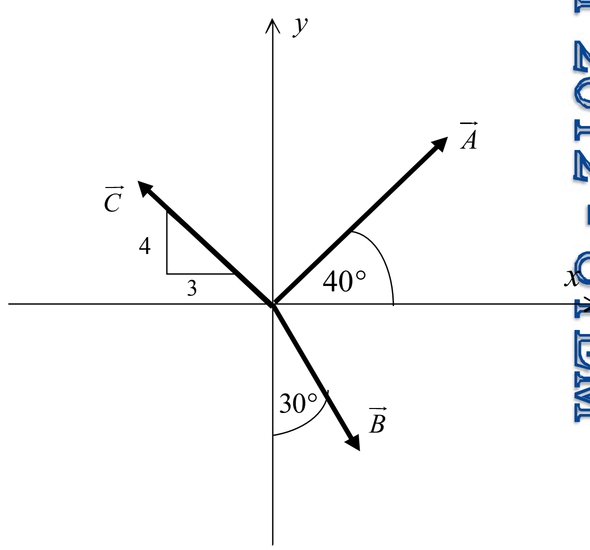
2.2.7 Algunas propiedades del algebra de vectores

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(Conmutatividad)}$$

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} \qquad \text{(Asociatividad)}$$

$$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a}+k\vec{b} \qquad \text{(Distributividad por un escalar)}$$

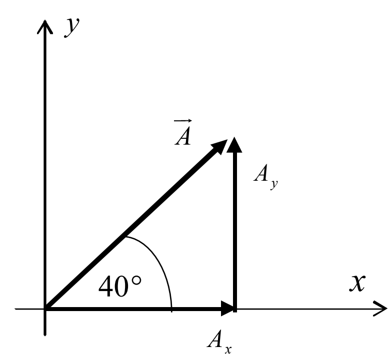
Ejemplo 2.1 Cuatro vectores se encuentran en el plano xy. El módulo del vector $\vec{A}$ es de 20 unidades y forma un ángulo de 40° con el eje x. El vector $\vec{B}$, tiene magnitud de 15 unidades y forma un ángulo de 30° respecto del eje y negativo. El vector $\vec{C}$, tienen 10 unidades de módulo y un triángulo rectángulo de catetos 4 y 3 puede formarse bajo él, tal como se indica en la figura. Un vector $\vec{D}$ parte en el origen y termina en el punto (-6, -7). Escriba cada vector en término de sus componentes canónicas, el módulo del vector $\vec{D}$ y el vector resultante de los cuatro vectores $\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$.



Solución

En la figura se muestra el vector $\vec{A}$ y sus respectivas componentes, a partir de lo cual puede escribirse:

$$\cos\left(40°\right) = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|}$$



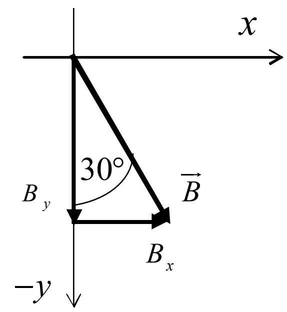
$$A_x = \left|\vec{A}\right|\cos(40°) = 20\cdot\cos(40°) = 15.3$$

$$sen(40°) = \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|}$$

$$A_y = \left|\vec{A}\right| sen(40°) = 20\cdot sen(40°) = 12.9$$

$$\vec{A} = 15.3\hat{i} + 12.9\hat{j}$$

Para el vector $\vec{B}$:



$$sen(30°) = \frac{B_x}{\left|\vec{B}\right|}$$

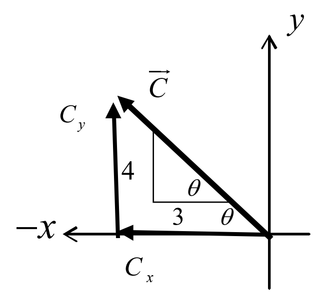
$$B_x = \left|\vec{B}\right| sen(30°) = 15\cdot sen(30°) = 7.5$$

$$\cos(30°) = \frac{B_y}{\left|\vec{B}\right|}$$

$$B_y = \left|\vec{B}\right|\cos(30°) = 15\cdot\cos(30°) = 12.9$$

$$\vec{B} = 7.5\hat{i} - 12.9\hat{j}$$

Para el vector $\vec{C}$:



$$\cos\theta = \frac{C_x}{\left|\vec{C}\right|}$$

$$C_x = \left|\vec{C}\right|\cos\theta$$

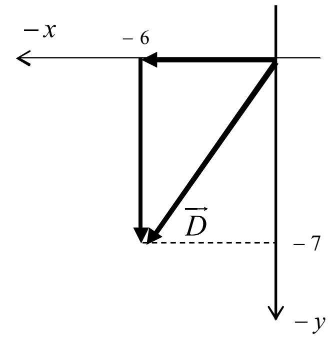
$$sen\theta = \frac{C_y}{\left|\vec{C}\right|}$$

$$C_y = \left|\vec{C}\right| sen\theta$$

Dado que el triángulo rectangulo bajo el vector es semejante al triángulo formado por el vector y sus componentes en el eje x e y , puede escribirse:

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \qquad y \qquad sen\theta = \frac{4}{5}$$

Entonces:



$$\vec{C} = -6\hat{i} + 8\hat{j}$$

Para el vector $\vec{D}$:

$$\vec{D} = -6\hat{i} - 7\hat{j}$$

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=(15.3\hat{i}+12.9\hat{j})+(7.5\hat{i}-12.9\hat{j})+(-6\hat{i}+8\hat{j})+(-6\hat{i}-8\hat{j})$$
$$\vec{R}=(15.3+7.5-6-6)\hat{i}+(12.9-12.9+8-7)\hat{j}$$
$$\vec{R}=10.8\hat{i}+1\hat{j}$$

El módulo del vector $\vec{R}$ puede determinarse como:

$$\left|\vec{R}\right|=\sqrt{(10.8)^2+(1)^2}$$
$$\left|\vec{R}\right|=10.8$$

Y el ángulo de inclinación respecto del eje x es:

$$\phi=\arctan\left(\frac{1}{10.8}\right)=5.3°$$

2.2.8 Producto punto

Se define el producto escalar o producto punto entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como:

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\phi=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=escalar$$

donde ϕ es el ángulo más pequeño que se forma entre ambos vectores, de tal suerte que $0 \leq \phi \leq 180°$. Conviene señalar que en este caso, el producto punto de dos vectores da como resultado una magnitud escalar.

En física se utiliza el producto punto para definir el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula como el producto punto entre el vector fuerza y el vector desplazamiento de dicha partícula y el flujo de un campo (ej. eléctrico, magnético) como el producto punto entre el vector campo y un vector perpendicular al área donde se desea determinar el flujo.

El producto punto permite determinar el ángulo que forman dos vectores conocidas sus componentes, también se puede conocer la proyección de un vector sobre otro.

Si el producto punto entre dos vectores es nulo, entonces los vectores son perpendiculares entre sí.

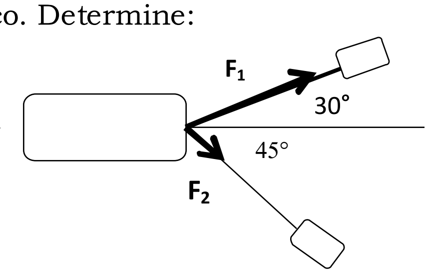
Ejemplo 2.2 Dos remolcadores arrastran una barcaza, por agua tranquila. Uno tira con una fuerza F_1 = 20[kN] con un ángulo de 30° respecto del eje de la barcaza, como se muestra en la figura. El segundo remolcador jala con una fuerza F_2 = 15[kN] y un ángulo y un ángulo de 45° también respecto del eje del barco. Determine:

a) Los vectores $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ en término de sus componentes canónicas.

b) la fuerza total (vector) con que jalan los remolcadores la barcaza.

c) la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

d) el ángulo que forman $\mathbf{F_1}$ con $\mathbf{F_2}$, a partir de $\mathbf{F_1}\cdot\mathbf{F_2}$



Solución

a) Los vectores pueden expresarse de la forma:

$$\vec{F_1} = \left|\vec{F_1}\right|\cos 30°\hat{i} + \left|\vec{F_1}\right| sen30°\hat{j}$$

$$\vec{F_1} = \left(17.3\hat{i} + 10.0\hat{j}\right)[kN]$$

$$\vec{F_2} = \left|\vec{F_2}\right|\cos 45°\hat{i} - \left|\vec{F_2}\right| sen45°\hat{j}$$

$$\vec{F_2} = \left(10.6\hat{i} - 10.6\hat{j}\right)[kN]$$

b) Usando el método de las componentes, la suma de ambas fuerzas puede expresarse:

$$\vec{F_T} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{F_T} = \left(\left(17.3 + 10.6\right)\hat{i} + \left(10.0 - 10.6\right)\hat{j}\right)[kN]$$

$$\vec{F_T} = \left(27.9\hat{i} - 0.6\hat{j}\right)[kN]$$

c) La magnitud del vector resultante es:

$$\left|\vec{F_T}\right| = \sqrt{\left(27.9\right)^2 + \left(-0.6\right)^2}\,[kN]$$

$$\left|\vec{F_T}\right| = 27.9[kN]$$

Y el ángulo que forma con el eje x es:

$$\phi = \arctan\left(\frac{-0.6}{27.9}\right)$$

$$\phi = -1.2°$$

d) Se puede expresar el producto punto como:

$$\vec{F_1} \bullet \vec{F_2} = F_{1x} \cdot F_{2x} + F_{1y} \cdot F_{2y} = 17.3 \cdot 10.6 + 10.0 \cdot \left(-10.6\right) = 77.4$$

Además:

$$\vec{F_1} \bullet \vec{F_2} = \left|\vec{F_1}\right| \cdot \left|\vec{F_2}\right| \cos\phi$$

Entonces:

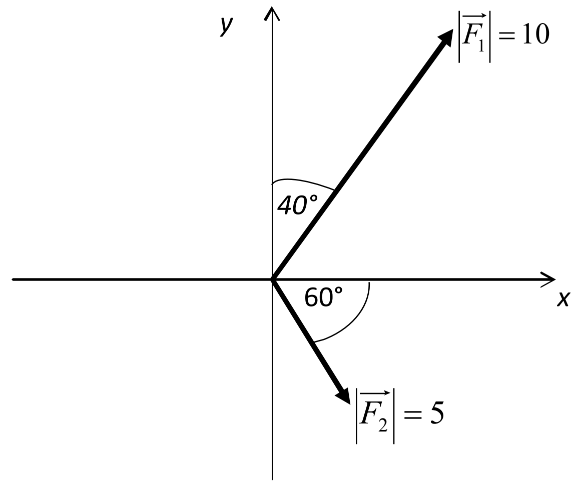
$$\vec{F_1} \bullet \vec{F_2} = 20 \cdot 15 \cdot \cos\phi = 77.4$$

$$\cos\phi = \frac{77.4}{20 \cdot 15}$$

$$\phi = arc\cos\left(\frac{77.4}{20 \cdot 15}\right)$$

$$\phi = 75°$$

Ejemplo 2.3 Considere los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, donde el módulo de $\vec{F}_1$ es 10 y el módulo de $\vec{F}_2$ es 5, como se muestra en la figura. El vector $\vec{F}_3$ tiene su origen en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en el punto (-6, 4).



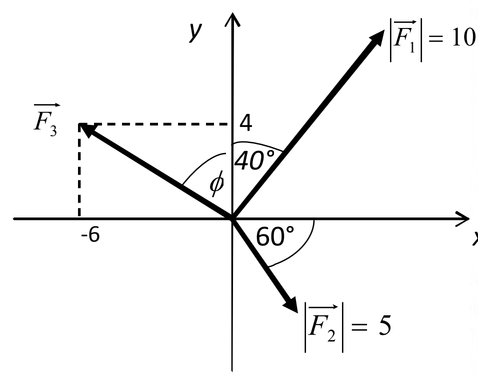
a) Exprese cada uno de los vectores en componentes cartesianas
b) Determine el vector resultante $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$
c) Encuentre la magnitud y dirección de un vector $\vec{F}_4$, tal que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 6\hat{j}$
d) Determine el ángulo formado entre los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$

Solución

a) $\vec{F}_1 = 10\,sen\,40°\hat{i} + 10\cos 40°\hat{j} = 6{,}43\hat{i} + 7{,}66\hat{j}$

$\vec{F}_2 = 5\cos 60°\hat{i} - 5\,sen\,60°\hat{j} = 2{,}5\hat{i} - 4{,}33\hat{j}$

$\vec{F}_3 = -6\hat{i} + 4\hat{j}$



b) $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$\vec{F}_R = (6{,}43 + 2{,}5 - 6)\hat{i} - (7{,}66 - 4{,}33 + 4)\hat{j}$

$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2{,}93\hat{i} - 1.33\hat{j}$

c) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 6\hat{j}$

$\vec{F}_R + \vec{F}_4 = 6\hat{j}$

$\vec{F}_4 = 6\hat{j} - \vec{F}_R = (0 - 2{,}93)\hat{i} + (6 - 7{,}33)\hat{j} = -2{,}93\hat{i} - 1{,}33\hat{j}$

$|\vec{F}_4| = \sqrt{2{,}93^2 - 1{,}33^2} = 3{,}22$

$$\theta = -\arctan\left(\frac{1{,}33}{293}\right) = -24{,}4°$$

d) $\vec{F}_1 \bullet \vec{F}_3 = (6{,}43)(-6) + (7{,}66)(4) = -7{,}94 = |\vec{F}_1||\vec{F}_3|\cos\alpha$

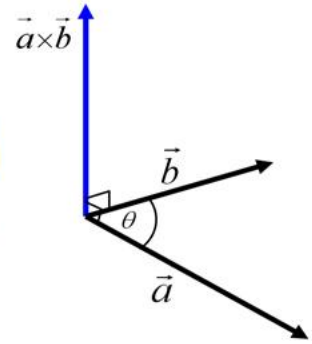
$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7{,}94}{10\cdot\sqrt{6^2 + 4^2}}\right) = 96{,}3°$$

Otro camino:

$$\phi = \arctan\left(\frac{6}{4}\right) = 56{,}3°$$

$\alpha = \phi + 40° = 56{,}3° + 40° = 96{,}3°$

2.2.9 Producto cruz



La relación $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ expresa el producto cruz entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el que da por resultado un vector $\vec{c}$ perpendicular al plano formado por los vectores originales. Su sentido está dado por la regla de la mano derecha, donde el dedo pulgar da el sentido y los otros dedos se apuntan desde el primer al segundo vector (desde $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$). El módulo o magnitud del producto cruz, se define como:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| sen\phi=\left|\vec{c}\right|$$

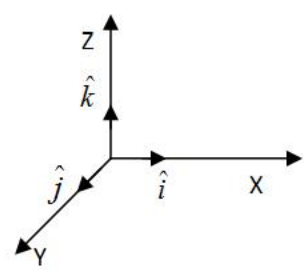
donde $0 \leq \phi \leq 180°$.

Para hallar el producto $\vec{a}\times\vec{b}$ en término de los vectores unitarios, es necesario desarrollar una operatoria conocida como "determinante", cuyo resultado permitirá conocer las componentes del nuevo vector $\vec{c}$. Entonces,

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\hat{i}(a_yb_z-a_zb_y)-\hat{j}(a_xb_z-a_zb_x)+\hat{k}(a_xb_y-a_yb_x)$$

con

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y$$
$$c_y=a_xb_z-a_zb_x$$
$$c_z=a_xb_y-a_yb_x$$



Dados los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, se tiene

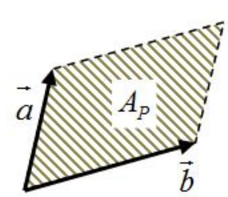
$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=-\hat{k} \qquad \hat{i}\times\hat{k}=\hat{j} \qquad \hat{k}\times\hat{j}=\hat{i}$$

Revisar cuando $-\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$

En física se utiliza el producto cruz para definir el momento de torsión (torque) como el producto cruz entre el vector posición y el vector fuerza $\left(\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}\right)$y la fuerza en una partícula cargada por efecto de un campo magnético como el producto entre la carga eléctrica y producto cruz entre el vector velocidad y el vector campo magnético $\left(\vec{F}=q\cdot\vec{v}\times\vec{B}\right)$

Puede demostrarse que el área de un paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, está dada por:



$$A_P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Además si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos lados de un triángulo, entonces el área de ese triángulo está dada por

$$A_t = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{2}$$

El producto cruz igual el vector nulo es condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares.

Ejemplo 2.4 Dado los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, determine: a) $\left|\vec{A}\right|$, $\left|\vec{B}\right|$, $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}\bullet\vec{B}$; b) un vector $\hat{C}$ tal que sea unitario y perpendicular a ambos.

<u>Solución:</u>
a) El módulo de los vectores se determina como:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}$$
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{14} = 3.74$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}$$
$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{14} = 3.74$$

b) Usando el método de las componentes, la suma de los vectores es:

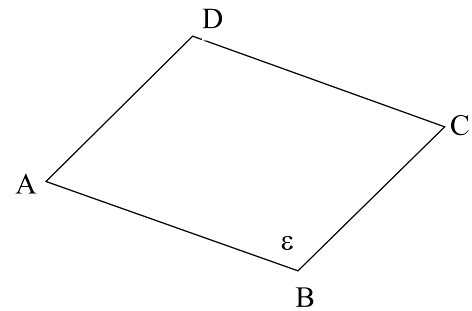
$$\vec{A}+\vec{B} = (3+2)\hat{i} + (-1+3)\hat{j} + (2+-1)\hat{k}$$
$$\vec{A}+\vec{B} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}$$

c)
$$\vec{A}\bullet\vec{B} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2(-1)$$
$$\vec{A}\bullet\vec{B} = 1$$

d)
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left((-1)\cdot(-1) - 2\cdot 3\right) - \hat{j}\left(3\cdot(-1) - 2\cdot 2\right) + \hat{k}\left(3\cdot 3 - (-1)\cdot 2\right)$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -5\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}$$
$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + 11^2}$$
$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{195} = 13.9$$
$$\hat{C} = \frac{-5\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}}{\sqrt{195}}$$

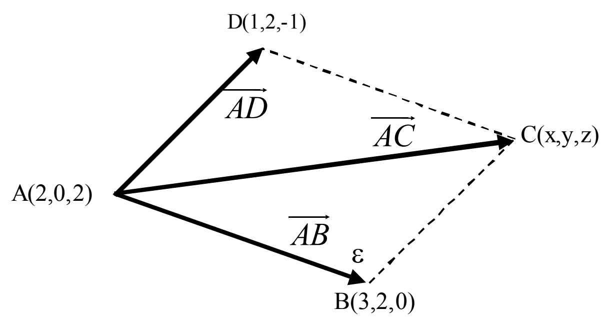
Ejemplo 2.5 en el paralelogramo de la figura, se conocen las coordenadas de tres vértices: A (2,0,2), B (3,2,0) y D (1,2,-1). Las coordenadas se miden en metros. Determine:
a) las coordenadas del vértice C;
b) el área del paralelogramo;
c) el ángulo ε



Solución
a) La figura muestra que se ha "vectorizado" dos lados del paralelogramo y una de sus diagonales y, además, se ha explicitado las coordenadas de cada vértice. En cada vértice puede asociarse con un vector posición.

Entonces:

$$\vec{r_A} = 2\hat{i} + 2\hat{k}$$
$$\vec{r_B} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$$
$$\vec{r_C} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{r_D} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

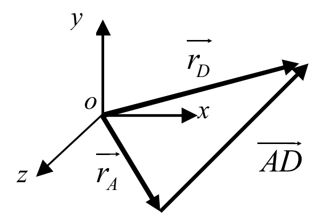


Además se observa que

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \qquad (1)$$

En la figura adjunta muestra que $\overrightarrow{AD}$ puede escribirse en función de $\vec{r_D}$ y $\vec{r_A}$, pues

$$\vec{r_A} + \overrightarrow{AD} = \vec{r_D}$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{r_D} - \vec{r_A}$$
$$\overrightarrow{AD} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$



Análogamente

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (x-2)\hat{i} + y\hat{j} + (z-2)\hat{k} \qquad (2)$$

Si se tiene presente la relación (1), se encuentra

$$\overrightarrow{AC} = 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

De la relación (2), se halla

$$\overrightarrow{AC} = 4\hat{j} - 5\hat{k} = (x-2)\hat{i} + y\hat{j} + (z-2)\hat{k}$$

$$0 = x - 2 \qquad x = 2$$
$$4 = y \qquad y = 4$$
$$-5 = z - 2 \qquad z = -3$$

Luego,

C(2,4,-3)

b) El área del paralelogramo está dado por:

$$A_P = \left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}\right|$$

Pero

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4+6)\hat{i} - (2+3)\hat{j} + (-2-2)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

Luego

$$A_P = \left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\left[m^2\right]$$

c) La figura muestra que

$$\alpha + \varepsilon = 180°$$
$$\varepsilon = 180° - \alpha$$

Pero

$$\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-1+4+6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{9}}\right) = 36.7°$$

Finalmente

$$\varepsilon = 143.3°$$

2.3 Algunas aplicaciones de vectores en física

2.3.1 Posición $\left(\vec{r}\right)$

Corresponde a un vector que comienza en el origen del sistema de coordenadas (arbitrario) y culmina en el punto donde se encuentra la partícula. Su unidad de medida en el SI es el metro [m]

2.3.2 Desplazamiento $\left(\Delta\vec{r}\right)$

Se define el vector desplazamiento como la diferencia entre el vector posición final y el vector posición inicial luego que una partícula se mueva, así

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Su unidad de medida en el SI es el metro [m]

2.3.3 Velocidad $\left(\vec{v}\right)$

Corresponde a una medida de que tan rápido ocurre un cambio en la posición (desplazamiento) de una partícula, matemáticamente

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Su unidad de medida en el SI es [m/s]

2.3.4 Fuerza$\left(\vec{F}\right)$

En mecánica es la responsable de que una partícula cambie su velocidad. Cuando varias fuerzas actúan sobre un mismo punto se cumple el principio de superposición que indica que la fuerza resultante corresponde a la suma (vectorial) de todas las fuerzas aplicas.

$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Su unidad de medida en el SI es el Newton [N]

2.3.5 Equilibrio de traslación

Una partícula está en equilibrio de traslación (en particular en reposo) cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella es nula, matemáticamente

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

2.3.6 Momentum lineal

Corresponde al producto de la masa por la velocidad y en el SI se mide en [kg·m·s^{-1}].

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2.3.5 Campo eléctrico

Asociado a una carga en reposo, existe un campo eléctrico **E**, que produce una fuerza **F$_e$** sobre una carga q.

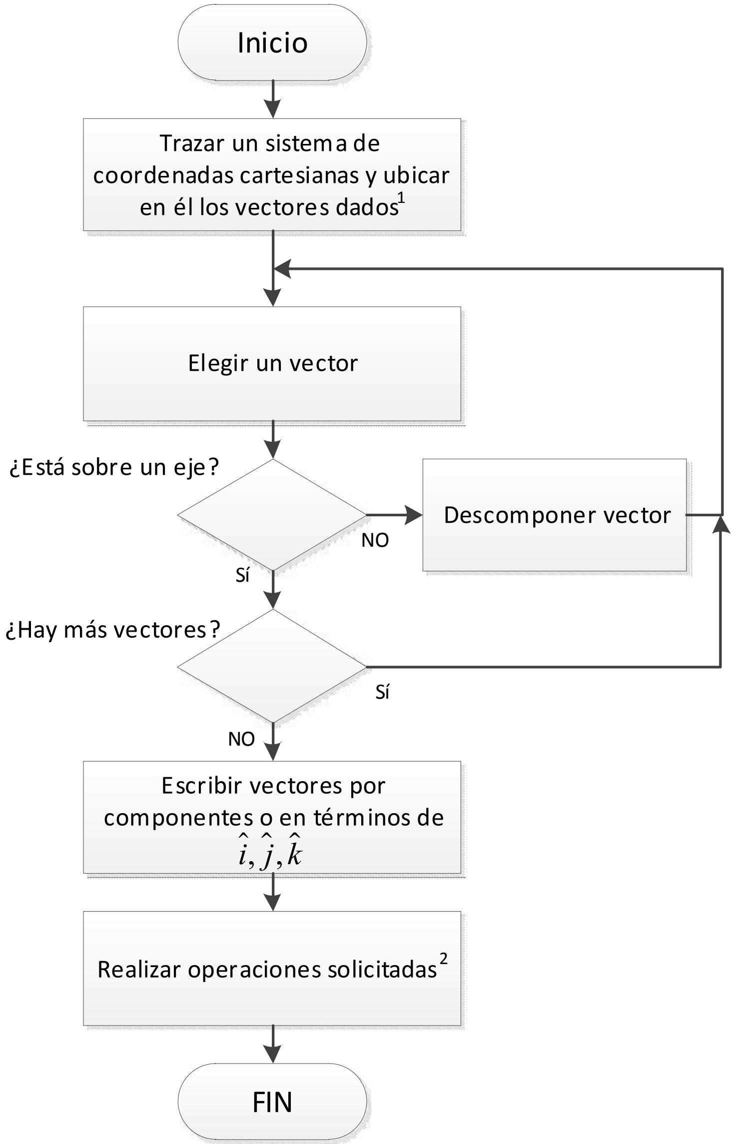
$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

2.3.5 Campo magnético

Asociado a un imán permanente o a cargas en movimiento, existe un campo magnético **B**, que produce una fuerza **F$_m$** sobre una carga q que se mueve con velocidad **v**.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

2.4 Diagrama de flujo para problemas de vectores que requieren el uso de sus componentes



[1] Elegir el sistema de coordenadas de modo que la mayoría de los vectores coincidan con uno de los semiejes. Recordar que el origen de un vector debe ser el origen del sistema del sistema de coordenadas.

[2] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

2.5 Ejercicios propuestos

01) Encontrar las componentes rectangulares de un vector de 15 unidades de longitud cuando éste forma un ángulo de a) 50°, b) 130°, c) 230° y d) 310°, con respecto al eje positivo de las X.

R.: a) 9,6 ; 11,5 ; b) -9,6 ; 11,5 ; c) -9,6 ; -11,5 ; d) 9,6 ; -11,5

02) Sean los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. a) Calcule los vectores $\vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$. b) Encuentre $\left|\vec{A}\right|, \left|\vec{B}\right|, \left|\vec{A} + \vec{B}\right|, \left|\vec{A} - \vec{B}\right|$ y el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

R.: b) 7,1 ; 2,4 ; 8,8 ; 5,8 ; 50,6°

03) Dado los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, encuentre un vector unitario que sea perpendicular a ambos.

R.: $\dfrac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$ (¿Es única la respuesta?)

04)) El vector **A** se extiende desde el origen hasta un punto de coordenadas polares (8,0; 70°) y el vector **B** está trazado desde el origen hasta el punto de coordenadas polares (5,0; 130°). Determine: A) **A** · **B** ; B) el ángulo que forman **A** con **B**, a partir de **A** · **B**.

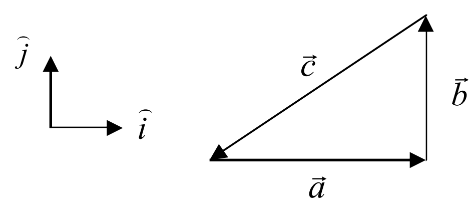
R.: A) 20,0 ; B) 60°

05) Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ forman un triángulo rectángulo como se indica en la figura. Sus módulos son 4, 3 y 5 unidades respectivamente.

a) Calcule $\vec{a} \bullet \vec{b}$, $\vec{a} \bullet \vec{c}$, $\vec{b} \bullet \vec{c}$.

b) Calcule $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$.

R.: a) 0 , -16 , -9 ; b) $12\hat{k}$, $-12\hat{k}$, $12\hat{k}$



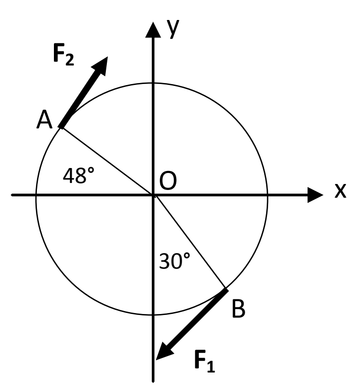
06) Un disco horizontal, ubicado en el plano xy de la figura adjunta, puede girar libremente en torno a un eje que pasa por O y que es perpendicular al plano del disco. En los puntos A y B se aplican sendas fuerzas tangentes al disco de magnitudes F_1 = 50,0 N y F_2 = 40,0 N, respectivamente.

Determine:

a) $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$

b) El ángulo que tiene por lados a $\mathbf{F_1}$ y a $\mathbf{F_2}$.

R.: a) $-13{,}6\hat{i} + 1{,}8\hat{j}$; b) 168°



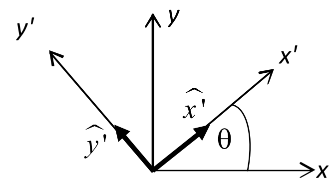
07) Usando vectores unitarios a lo largo de las tres aristas un cubo de lado a, determine: a) las diagonales de un cubo en términos vectoriales; b) la longitud de las diagonales; c) los ángulos formados por las diagonales con las aristas adyacentes; d) el ángulo formado entre dos diagonales.

R.: a) $a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$; $a\hat{i}+a\hat{j}-a\hat{k}$; $a\hat{i}-a\hat{j}-a\hat{k}$; $a\hat{i}-a\hat{j}+a\hat{k}$; b) $a\sqrt{3}$; c) 54,7°; d) 70,5°

08) Encuentre un vector unitario $\hat{u}$ que esté contenido en el plano yz y que sea perpendicular al vector $\vec{L}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

R.: $\hat{u}=\frac{\sqrt{10}}{10}\left(3\hat{j}+\hat{k}\right)$

09) Los dos sistemas de coordenadas de la figura están rotados entres sí en un ángulo θ: si $\widehat{x'}$ es un vector unitario en la dirección del eje x' e $\widehat{y'}$ es un vector unitario en la dirección del eje y', a) escriba $\widehat{x'}$ e $\widehat{y'}$ en términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$; b) escriba $\vec{F}=3\hat{i}-2\hat{j}\left[N\right]$ en términos de $\widehat{x'}$ y de $\widehat{y'}$, si θ=45°.



R.: $\widehat{x'}=\cos\theta\hat{i}+\operatorname{sen}\theta\hat{j}$, $\widehat{y'}=-\operatorname{sen}\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}$; $\vec{F}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\widehat{x'}-5\widehat{y'}\right)\left[N\right]$

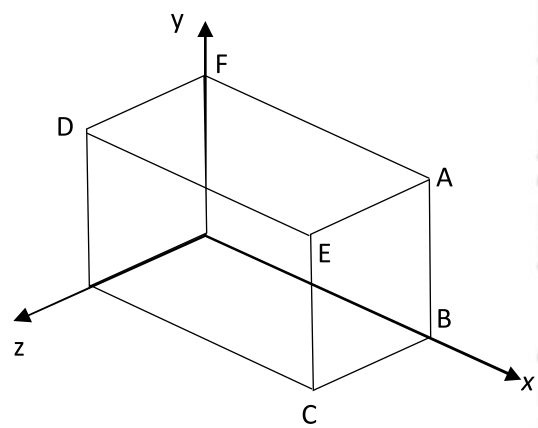
10) Para el paralelepípedo de la figura, se definen los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$
$\overrightarrow{BC}=\vec{d}$
$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$
$\overrightarrow{EF}=\vec{b}$

a) escriba $\vec{d}$ en términos de $\vec{a}$ $\vec{b}$ y $\vec{c}$

b) si $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{d}\right|=5{,}0\left[cm\right]$ y $\left|\vec{b}\right|=13{,}0\left[cm\right]$, halle el ángulo que forma $\overrightarrow{EF}$ con $\overrightarrow{CD}$

R.: a) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; b) 32°



11) Un paralelepípedo tiene por aristas a los vectores $\vec{a}$ $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

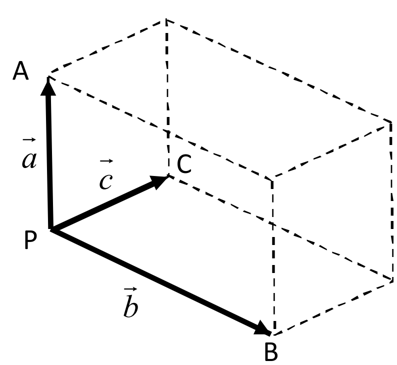
a) Demuestre que el volumen V del paralelepípedo está dado por

$$V=\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

b) Demuestre que $V=\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

c) Determine el volumen del paralelepípedo si P(1,0,2)[m], A(3,2,4)[m], B(2,6,8)[m], y C(2,-3,1)[m]

R.: 20[m³]



12) Un niño tira de un trineo con una cuerda aplicando una fuerza de 60 N. La cuerda forma un ángulo de 40° respecto al piso. a) Calcule el valor de la componente horizontal de la fuerza que tiende a poner en movimiento al trineo en dirección paralela al piso. b) Calcule la fuerza que tiende a levantar verticalmente al trineo

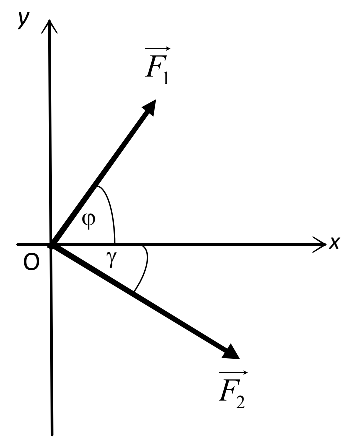
R.: a) 46 N; b) 39 N

13) En la figura adjunta, F_1=5,0[N], F_2=7,0[N], φ=60° y γ=-30°. Determine:

a) la fuerza resultante;

b) la magnitud de la fuerza resultante;

c) el ángulo β que forma la fuerza resultante con el eje x



R.: a) $\left(\frac{5+7\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{5\sqrt{3}-7}{2}\hat{j}\right)[N]$; b) 8,6[N]; c) β=5,5°

14) Sobre una partícula actúan dos fuerzas. La primera de ellas tienen una magnitud de 150[N] y forma un ángulo de 120° con el eje x positivo de un sistema de coordenadas. La fuerza resultante tiene una magnitud de 140[N] y forma un ángulo de 35° con el mismo eje x positivo. Halle la magnitud y dirección de la segunda fuerza

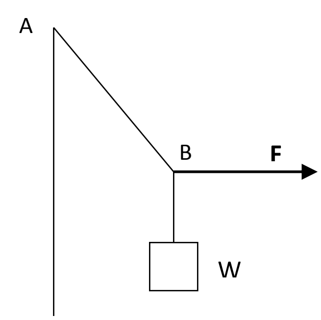
R.: 176[N], 7.7°

15) Una persona camina en un plano 20.0m a 30.0°, luego camina 40.0m a 120.0°, después camina 25.0m a 180.0°, luego 42.0m a 270.0° y finalmente 12.0m a 315.0°. Determine el vector desplazamiento de la persona.

R.: 20.1m a 197°

16) El cuerpo representado en la figura tira hacia abajo con una fuerza de 248 [N] (fuerza peso). Está sujeto por medio de una cuerda AB y se le aplica una fuerza horizontal **F**, de modo que se mantiene en equilibrio en la posición indicada. Suponiendo que AB = 150 [cm] y la distancia entre la pared y el cuerpo es de 90 [cm], calcule el valor de la magnitud de la fuerza **F** y de la tensión en la cuerda.

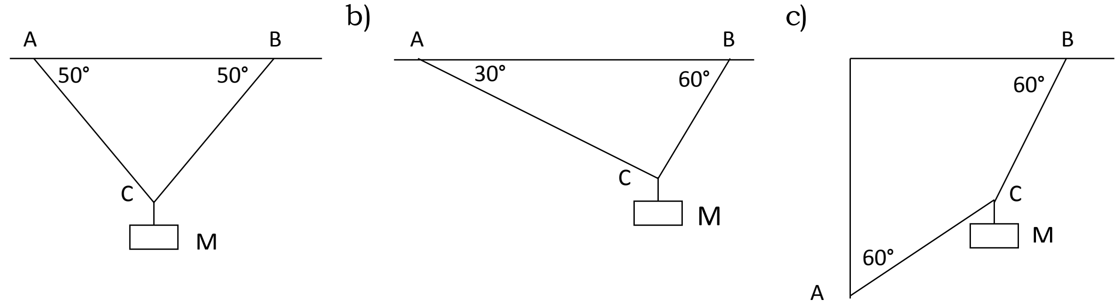
(Sugerencia: Dibuje todas las fuerzas que se aplican en el punto B, súmelas vectorialmente y recuerde la condición de equilibrio de traslación)



R.: F = 186 [N] ; T = 310 [N]

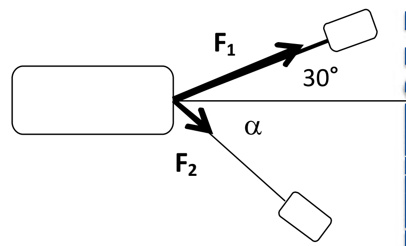
17) Determine las magnitudes de las tensiones en las cuerdas AC y BC en cada figura, si M pesa 400 [N].
(Sugerencia: Dibuje todas las fuerzas que se aplican en el punto C, súmelas vectorialmente y recuerde la condición de equilibrio de traslación)

a) b) c)



R.: a) $T_{AC} = T_{BC} = 261[N]$; b) $T_{AC} = 200[N]$, $T_{BC} = 346[N]$; c) $T_{AC} = 400[N]$, $T_{BC} = 693[N]$

18) Dos remolcadores arrastran una barcaza. La resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores tiene un valor de 25 [kN] y está dirigida según el eje de la barcaza. Usando solución trigonométrica (y también por descomposición de vectores), encuentre: a) la fuerza ejercida por los remolcadores sabiendo que $\alpha = 45°$; b) la medida del ángulo α para que $\mathbf{F_2}$ tenga el mínimo valor. ¿Cuánto valen $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ en este caso?



R.: a) $F_1 = 18{,}3$ [kN]; $F_2 = 12{,}9$ [kN]; b) $\alpha = 60°$; $F_1 = 21{,}6$[kN] ; $F_2 = 12{,}5$[kN]

19) En un experimento de laboratorio un ratón camina 10 [m], da un giro de 90° hacia la derecha y camina 5 [m], efectúa otro giro de 90° a la derecha y camina 7 [m]. Determine el desplazamiento del ratón desde su posición inicial.
R.: 5,83 [m] y a 59° a la derecha de la primera posición.

20) Un bote lleva una velocidad de 4 [km/h] en agua tranquila. Atraviesa un río cuya corriente tiene una velocidad de 3 [km/ h]. a) ¿Cuál es la dirección y magnitud de la resultante si el río tiene un ancho de 15 [m] y b) en qué punto del lado opuesto se detiene?
R.: a) 5 [km/h] y 53° ; b) 11,3 [m]

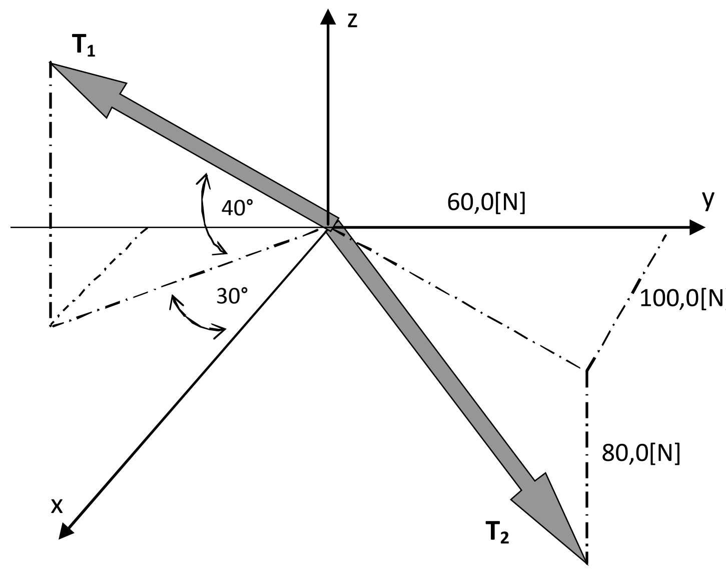
21) Un avión viaja en dirección este con una rapidez de 500[km/h]. Si en esa zona sopla el viento en dirección sur con rapidez de 90[km/h]. ¿Cuál es la dirección y rapidez del avión? ¿en qué dirección debe viajar el avión para que la velocidad resultante tenga una dirección este?

R.: 508[km/h] a 10° al sur del este

22) En la figura adjunta, la tensión $\vec{T}_1$ tiene una magnitud de 100,0 [N].

a) Escriba los vectores $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ en términos de $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$.

b) Encuentre un vector $\vec{T}_3$, tal que $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$.



R.: a) $\vec{T}_1 = \left(66,3\hat{i} - 38,3\hat{j} + 64,3\hat{k}\right)[N]$

$\vec{T}_2 = \left(-100,0\hat{i} + 60,0\hat{j} - 80,0\hat{k}\right)[N]$

b) $\vec{T}_3 = \left(33,7\hat{i} - 21,7\hat{j} + 15,7\hat{k}\right)[N]$

23) El *Principio de Arquímedes* establece que todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza vertical y ascendente, llamada *empuje* (**E**), cuya magnitud es igual al peso de fluido desplazado por el cuerpo sumergido.
Una pieza cúbica de madera de roble (densidad: 0,66 x 10^3 [kg/m^3]) flota en una piscina que contiene agua (densidad: 1000 [kg/m^3]). La arista de la pieza es 0,84 [m].

a) Haga un diagrama de fuerzas de la pieza de madera que flota en el agua

b) Demuestre que la magnitud del empuje es E = ρ'V'g, donde «ρ'» es la densidad del agua y «V'» es el volumen desalojado por la parte sumergida de la pieza.

c) ¿Qué condición debe cumplirse para que la pieza flote en el agua?

d) Determine la altura de la pieza que sobresale en el agua.

R.: 0,29 [m]

24) Considere que

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\hat{i} + V_{1y}\hat{j} + V_{1z}\hat{k}$$
$$\vec{V}_2 = V_{2x}\hat{i} + V_{2y}\hat{j} + V_{2z}\hat{k}$$
$$\vec{V}_3 = V_{3x}\hat{i} + V_{3y}\hat{j} + V_{3z}\hat{k}$$

Demuestre que $\vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3\right)\vec{V}_2 - \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)\vec{V}_3$

25) Demuestren que si $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 0$, entonces $\vec{V}_1 \times \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \times \vec{V}_1$.
Además, de las últimas relaciones, obtenga

$$\frac{V_1}{\text{sen}\,\alpha_{2,3}} = \frac{V_2}{\text{sen}\,\alpha_{3,1}} = \frac{V_3}{\text{sen}\,\alpha_{1,2}}$$

donde $\alpha_{m,n}$ es el ángulo que forman los vectores $\vec{V}_m$ y $\vec{V}_n$

26) Un tetraedro tiene sus vértices en los puntos O(0;0;0), A(2;0;0), B(0;2;0) y C(1;1;2). Determine: a) el vector que representa cada cara; b) el vector que representa todo el tetraedro; c) la magnitud de la superficie del tetraedro, si las coordenadas se miden en [m].
(Sugerencia: Cada cara del tetraedro puede representarse por un vector perpendicular a la cara, de magnitud igual al área de la cara y que "apunta" hacia el exterior de la pirámide. Por ejemplo: $\overrightarrow{S_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$).

R.: a) $2\hat{i} + 2\hat{j}$; $-2\hat{k}$; $2\hat{i} + \hat{k}$; $-2\hat{j} + \hat{k}$; b) $\vec{0}$; c) 9,3[m^2]

27) Se tiene un cubo de arista "c". Halle, usando métodos vectoriales: a) la longitud de las diagonales; b) los ángulos que forma la diagonal con cada arista; c) la suma de los cosenos cuadrados de los ángulos obtenidos anteriormente; d) el ángulo que forman las diagonales.

R.: a) $c\sqrt{3}$; b) 54,7°; c) 1; d) 70,5° o 109,5°

3 Cinemática de la Partícula

La cinemática, estudia el movimiento de los objetos sin preocuparse del por qué se mueven y responde preguntas, tales como ¿cuánto tiempo tarda una partícula en llegar de un punto a otro?, ¿qué distancia recorre en un cierto tiempo?, etc.

3.1 Rapidez media

La rapidez media corresponde a una relación entre la distancia recorrida por una partícula y el tiempo que tarda en recorrerla. Cualitativamente, la rapidez media se define como

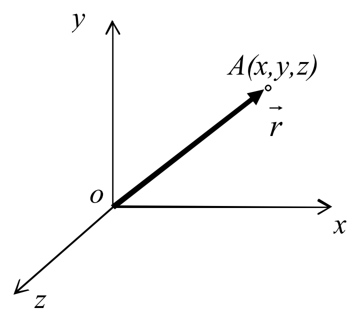
$$v_m = \frac{distancia}{tiempo}$$

La rapidez media es una magnitud física escalar y se expresa en [m/s], unidad que corresponde al sistema internacional de unidades (SI).

3.2 Vector posición $\left(\vec{r}\right)$

Para describir la posición de una partícula, en un instante dado, se puede utilizar el **Vector posición.** Este tiene su origen en el origen del sistema de coordenadas (arbitrario) y culmina en el punto A donde se encuentra la partícula (punto A). Su unidad de medida en el SI, es el metro [m], y suele escribirse como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

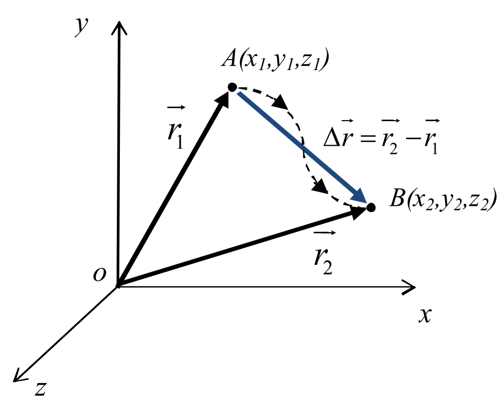


3.3 Vector Desplazamiento $\left(\Delta\vec{r}\right)$

Se define el vector desplazamiento como la diferencia entre el vector posición final (punto B) y el vector posición inicial (punto A) de una partícula que se ha movido, de modo que

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = \left(x_2 - x_1\right)\hat{i} + \left(y_2 - y_1\right)\hat{j} + \left(z_2 - z_1\right)\hat{k}$$



Su unidad de medida en el SI es el metro [m].

3.4 Velocidad media

La velocidad media es una relación vectorial entre el desplazamiento de una partícula y el tiempo utilizado en su recorrido y entrega información de la dirección y sentido del movimiento. Cualitativamente si una partícula se encuentra en el punto A de la figura anterior en el tiempo 1 (t_1) y luego se desplaza al punto B en un tiempo 2 (t_2), el desplazamiento ocurrido será $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, y el tiempo empleado es t_2-t_1, entonces la velocidad media se define como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

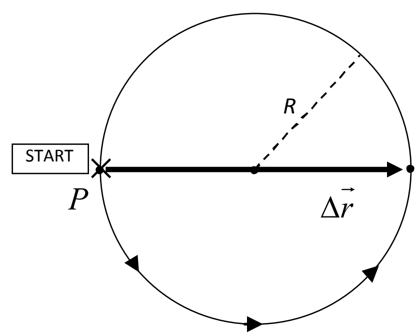
$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Su unidades de medida en el SI es [m/s]

Ejemplo 3.1 En una carrera de automóviles, un vehículo tarda 10[s] en recorrer la mitad de una pista circular de radio 100[m]. Considere al vehículo como una partícula y determine: a) la rapidez media y la magnitud de la velocidad media para la primera mitad del recorrido; b) la rapidez media y la magnitud de la velocidad media para la primera vuelta completa, si tarda 6[s] en la segunda media vuelta; c) una relación entre la rapidez media y la magnitud de la velocidad media.

Solución

a) En la figura se muestra la situación planteada, donde se observa el camino recorrido por el vehículo y el vector desplazamiento para la primera media vuelta.



En este caso, la distancia recorrida corresponde a medio perímetro de una circunferencia, es decir la rapidez media es

$$v_m = \frac{distancia}{tiempo}$$

$$v_m = \frac{\pi \cdot R}{t} = \frac{\pi \cdot 100}{10}$$

$$v_m = 10 \cdot \pi [m/s] = 31{,}4 [m/s]$$

Como la magnitud o módulo del desplazamiento corresponde a dos veces el radio de la circunferencia, entonces el módulo de la velocidad media es

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

$$|\vec{v}_m| = \frac{2R}{t} = \frac{2 \cdot 100}{10}$$

$$|\vec{v}_m| = 20 [m/s]$$

b) En este caso, la distancia recorrida corresponde al perímetro de una circunferencia, y la rapidez media para la vuelta completa es

$$v_m = \frac{distancia}{tiempo}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{t_T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 100}{10+6}$$

$$v_m = \frac{25 \cdot \pi}{2}[m/s] = 39.3[m/s]$$

y el módulo del desplazamiento es cero, ya que, sale del punto P y vuelve al mismo lugar. Por tanto, la magnitud de la velocidad media es cero.

c) Al comparar los resultados obtenidos para cada pregunta, se concluye que en este ejercicio la rapidez media es diferente de la magnitud de la velocidad.

3.5 Velocidad Instantánea

En algunos casos puede interesar conocer con mayor detalle el movimiento, esto es, conocer la velocidad media para intervalos de tiempo cada vez más pequeños. En estos casos se habla de velocidad instantánea la que se define como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ya que el vector posición se puede escribir como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

entonces

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

donde

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

es decir

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Los factores v_x, v_y y v_z se denominan componentes escalares de la velocidad en la direcciones *x, y, z* respectivamente.
La magnitud de la velocidad instantánea corresponde a la rapidez instantánea y se determina con

$$\left|\vec{v}\right| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

3.6 Aceleración media

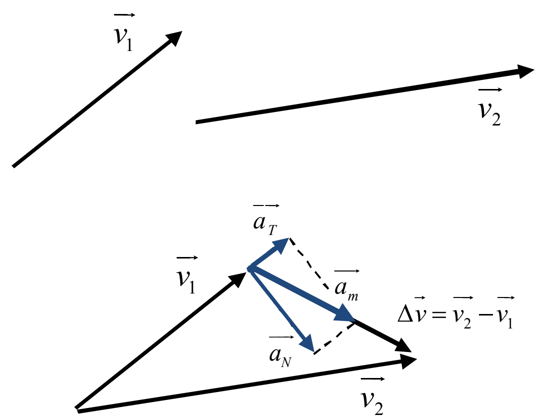
La aceleración es una medida de qué tan rápido cambia la velocidad un objeto. Si una partícula tiene velocidad $\vec{v}_1$ en el instante t_1 y luego cambia su velocidad a $\vec{v}_2$ en el instante t_2, entonces la aceleración media se define como

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

La aceleración media es también una magnitud física vectorial y en unidades del SI se expresa en [m/s²].

En la figura se muestra los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, a partir de los cuales y utilizando el método gráfico se determina $\Delta\vec{v}$. La aceleración media, tiene la misma dirección y sentido que $\Delta\vec{v}$.
La aceleración se puede descomponer en una componente paralela o tangencial $\left(\vec{a}_T\right)$ a $\vec{v}_1$, la cual hace que la velocidad cambie su magnitud y, una componente normal o perpendicular $\left(\vec{a}_N\right)$ a $\vec{v}_1$, la cual explica que la velocidad cambie su dirección.



Se concluye que la aceleración puede expresarse como

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

3.7 Aceleración Instantánea

Análogamente a la velocidad instantánea, cuando se desee conocer la aceleración media para intervalos de tiempo cada vez más pequeños, se define la aceleración instantánea como

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Además, como la velocidad instantánea está dada por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, entonces se puede expresar la aceleración instantánea como:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Las componentes escalares de la aceleración en las direcciones x, y, z, son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

En general la aceleración instantánea puede escribirse en término de sus componentes escalares como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

La magnitud de la aceleración instantánea puede hallarse con

$$\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Ejemplo 3.2 Un vehículo se desplaza a lo largo del eje x de un sistema de referencia. Su aceleración está dada por $a_x=-2x$, donde "x" se mide en [m] y "a" está dada en [m/s²]. Halle la relación entre la velocidad (v_x) y la posición (x), suponiendo que cuando $x=0$, $v_x=0{,}60$[m/s].

Solución

En la presente situación es claro que la aceleración es variable, pues depende de la posición del móvil (o sea, aquí las relaciones para el MRUA)

Como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Entonces

$$a_x = \frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad \text{(regla de la cadena)}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}\cdot v_x$$

$$-2x = v_x\frac{dv_x}{dt}$$

$$-2xdx = v_x dv_x$$

O sea,

$$v_x dv_x + 2xdx = 0$$

Al integrar se obtiene

$$\frac{v_x^2}{2} + x^2 = C$$

Para $x=0$, $v_x=0{,}60$[m/s]

$$\frac{0{,}60^2}{2} = C$$

$$C = 0{,}18[m^2/s^2]$$

Así,

$$v_x^2 + 2x^2 = 0{,}36$$

$$v_x = \pm\sqrt{0{,}36 - 2x^2}\,[m/s]$$

3.8 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A)

En este caso, la partícula se mueve a lo largo de una línea recta y su velocidad varía linealmente, es decir, su aceleración es constante, no cambia.

3.8.1 Rapidez y velocidad media

Por ejemplo, para un movimiento sobre el eje x, el objeto se encuentra en la posición x_1 en el instante t_1 y luego está en la posición x_2 en el instante t_2.
La rapidez media del móvil es

$$v_m = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|x_2 - x_1|}{t_2 - t_1}$$

y la velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x_2\hat{i} - x_1\hat{i}}{t_2 - t_1}$$

¿Se cumple aquí que $v_m = \left|\overrightarrow{v_m}\right|$?

3.8.2 Aceleración media

Si en el instante t_1 la velocidad es $\overrightarrow{v_{1x}}$ y luego en el instante t_2, la velocidad es $\overrightarrow{v_{2x}}$, entonces, la aceleración media está dada por

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$a_m\hat{i} = \frac{v_2\hat{i} - v_1\hat{i}}{t_2 - t_1}$$

Como el movimiento de la partícula tiene lugar sobre el eje x, opta por agregar "x" al subíndice de la componente escalar de cada velocidad.
Esta última expresión se lleva a una forma más convencional cuando se hace las consideraciones siguientes:

a) $t_1 = 0$ (se denomina tiempo inicial)

b) $v_1\hat{i} = v_{1x} = v_x(0) = v_{0x}$ (se denomina "rapidez inicial en x")

c) $t_2 = t$ (se denomina tiempo en cualquier instante)

d) $v_2\hat{i} = v_{2x} = v_x(t) = v_x$ (se denomina "rapidez final en x")

e) $a_m\hat{i} = a_x$ (se denomina "aceleración en x" o simplemente aceleración)

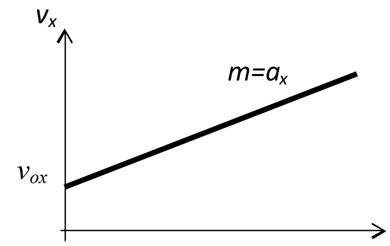
Luego,

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$$

lo que conduce a

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

que es una relación lineal para la rapidez instantánea v_x en función del tiempo y su representación gráfica se indica en la figura adjunta.



La posición (x) de la partícula está dada por la relación

$$x = x_0 + v_{0_x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

Donde x_0 es la posición de la partícula en el instante $t = 0$.

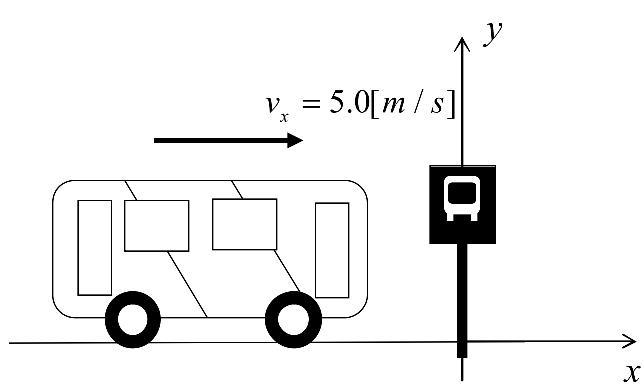
Además es conveniente tener presente en casos en que no se conoce el tiempo t, la relación

$$v_x{}^2 - v_{0_x}^2 = 2 \cdot a_x \cdot (x - x_0)$$

Cuando se desconoce la aceleración de la partícula, puede ser útil la expresión

$$x = x_0 + \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2} \right) t$$

Ejemplo 3.3 Un bus del Transantiago viaja con rapidez de 5,0[m/s] y al pasar por una paradero lleno de estudiantes comienza a acelerar con aceleración constante de 2.0[m/s²]. Determine: a) la distancia a la cual se encuentra del paradero a los 3,0[s]; b) la velocidad del bus a los 3,0[s] c) la distancia a la cual se encuentra del paradero cuando su rapidez es de 14 [m/s] (aproximadamente 50[km/h]).



Solución

a) La situación planteada se refiere a un movimiento en línea recta (sobre el eje x) y con aceleración constante. Si se considera el instante $t = 0$ justo cuando el bus pasa frente al paradero, entonces la posición inicial x_0 es cero, ya que el paradero se toma en el origen del sistema de coordenadas. Entonces la rapidez para $t = 0$ es 5,0[m/s], la aceleración es 2,0[m/s²] y la posición del bus está dado por

$$x = x_0 + v_{0_x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

$$x = 5,0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot t^2$$

Al evaluar la relación anterior en *t=3,0*[s], se obtiene la posición para ese instante

$$x(3,0) = 5,0 \cdot 3,0 + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot (3.0)^2$$

$$x(3,0) = 24[m]$$

b) La velocidad tiene solo componente en "el eje *x*", y está dada por

$$\vec{v} = \left(v_{0_x} + a_x t\right)\hat{i} = (5.0 + 2.0t)\hat{i}$$

Al evaluar la relación anterior con *t=3,0*[s], se obtiene la velocidad para ese instante

$$\vec{v}(3,0) = (5.0 + 2.0 \cdot 3.0)\hat{i}$$

$$\vec{v}(3,0) = 11\hat{i}[m/s]$$

c) Al reemplazar los valores hallados en la relación independiente del tiempo ,

$$v_x^{\ 2} - v_{0_x}^2 = 2 \cdot a_x \cdot (x - x_0)$$

$$14^2 - 5,0^2 = 2 \cdot 2,0 \cdot (x - 0)$$

$$x = 43[m]$$

Ejemplo 3.4 Un automóvil se desplaza por una carretera que es paralela a la vía de un metrotren. El automóvil se detiene ante un semáforo que está con luz roja en el mismo instante que pasa un metrotren con una rapidez constante de 12,0 [m/s]. El automóvil permanece detenido durante 6,0 s y luego parte con una aceleración constante de 2,0 [m/s²].
Determine:
a) El tiempo que emplea el automóvil en alcanzar al metrotren, medido desde el instante en que se detuvo ante el semáforo.
b) La distancia que recorrió el automóvil desde el semáforo hasta que alcanzó al metrotren.
c) La rapidez del automóvil en el instante que alcanza al metrotren.

<u>Solución</u>

a) Si "t" es el tiempo que emplea el automóvil en alcanzar al metrotren, entonces el tiempo empleado por el metrotren para recorrer esa misma distancia es "t+6". Para que el automóvil alcance al metrotren, ambos deben tener la misma posición, de tal suerte que

$$x_A = x_M$$

Como el automóvil se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y el metrotren lo hace con movimiento rectilíneo uniforme, entonces

$x_{0,A} + v_{0,A}t + \frac{1}{2}a_A t^2 = x_{0,M} + v_{0,M}(t+6)$, donde $x_{0,A} = x_{0,M} = 0$ y $v_{0,A} = 0$.

Luego,

$$\frac{1}{2}\cdot 2{,}0\cdot t^2 = 12{,}0(t+6)$$

$$t^2 - 12{,}0t - 72 = 0$$

$$t' = 16{,}39\ [s],\quad t'' = -\ 4{,}39\ [s]$$

Por tanto, el tiempo empleado por el automóvil para al alcanzar al metrotren, medido desde el instante en que se detuvo ante el semáforo, es

$$t = 16{,}39 + 6{,}0 = 22{,}39\ [s] \approx 22{,}4\ [s]$$

Otro método: cuando el automóvil parte, el metrotren está en la posición

$$x'_A = v_{0,A}t = 12\cdot 6 = 72[m]$$

Entonces, en cualquier instante posterior, las correspondientes funciones de posición (o itinerario) son

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 = t^2$$

$$x_M = 72 + 12t$$

Para que el automóvil alcance al metrotren

$$x_A = x_M$$

$$t^2 = 72 + 12t$$

Entonces,

$$t' = 16{,}39\ [s],\quad t'' = -\ 4{,}39\ [s]$$

b) La distancia recorrida por el automóvil para alcanzar al metrotren es

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 = t^2$$

$$x_A = 16{,}39^2$$

$$x_A = 269\ \text{m}$$

c) La rapidez del automóvil, en el instante que alcanza al metrotren, es

$$v_A = a_a t$$

$$v_A = 2{,}0\cdot 16{,}39$$

$$v_A = 32{,}8\left[m/s\right] = 118\left[km/h\right]$$

3.8.3 Gráficos

- En un gráfico Rapidez v/s Tiempo, la pendiente en un punto de la curva representa la aceleración instantánea del móvil en esa rapidez y en ese instante. Además, el área bajo la curva representa la distancia recorrida por la partícula.
- En un gráfico Posición v/s Tiempo, la pendiente en un punto de la curva representa la velocidad instantánea del móvil en esa posición y en ese instante.

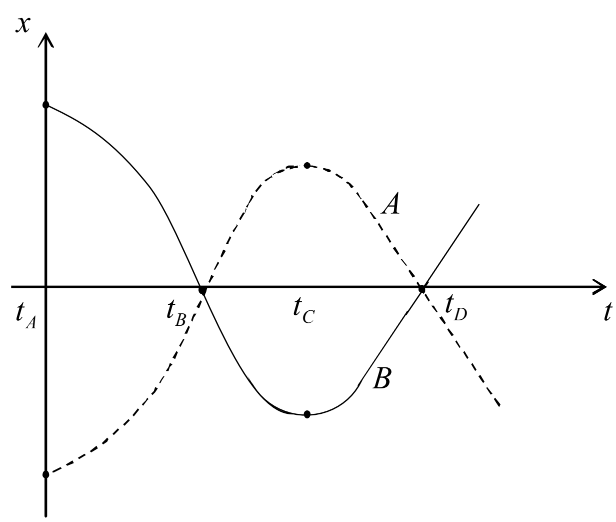
Además, puesto que la segunda derivada de una función se relaciona con la concavidad o curvatura de la gráfica de dicha función y que

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

entonces, para distintos gráficos x v/s t, se puede apreciar que

Gráfico x v/s t	***Aceleración***
Cóncava hacia arriba	Positiva
Cóncava hacia abajo	Negativa
Sin curvatura (puntos de inflexión)	Nula (v_x=cte.)

Ejemplo 3.5 Dos partículas A y B se mueven paralelas al eje x, por vías separadas, de acuerdo al gráfico adjunto. Para ambas partículas determine cualitativamente la posición, velocidad y aceleración en los instantes A, B, C y D. Realice además un diagrama que represente el movimiento en cada instante señalado.

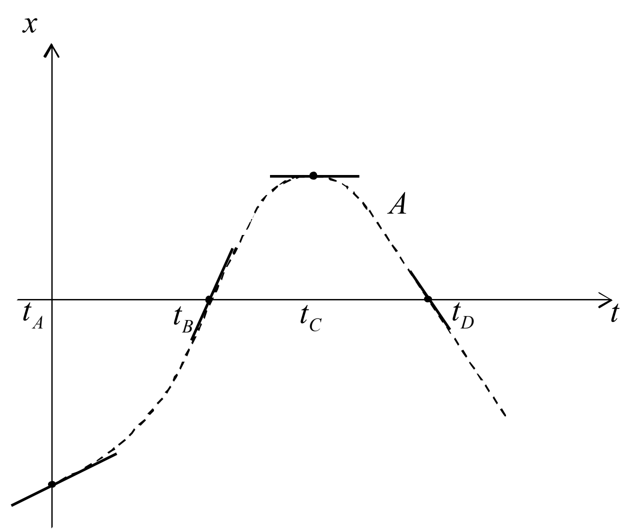


<u>Solución</u>

En la figura adjunta, se muestra la gráfica posición v/s t de la partícula A en la cual se ha marcado la pendiente de la recta tangente a cada punto estudiado.

- Para t=t_A

Se observa que la partícula se encuentra en la parte negativa del eje x, la pendiente de la recta tangente en ese punto es positiva, su velocidad es positiva y puesto que en el punto B la pendiente es positiva y mayor que en A, la aceleración es también positiva. Otra forma de obtener este resultado es a partir de la curvatura de la función posición, ya que en este tramo la función es cóncava hacia arriba.



- Para $t=t_B$

En este paso la partícula se encuentra en x=0 su velocidad es positiva, y su aceleración nula, puesto que la posición aumenta linealmente, luego la velocidad es contante.

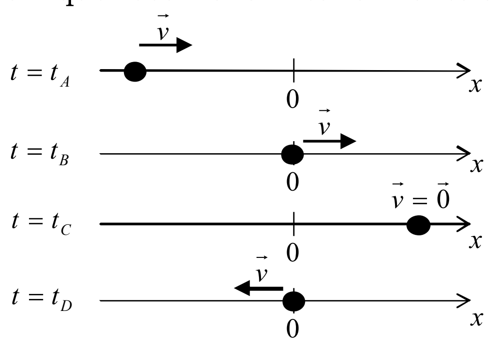
- Para $t=t_C$

La partícula se encuentra en la parte positiva del eje x, la pendiente de recta tangente es nula, entonces la velocidad es nula y la aceleración negativa, ya que se observa que en D la velocidad es negativa, idéntico resultado se obtiene de la observación de que la función posición es cóncava hacia abajo.

- Para $t=t_D$

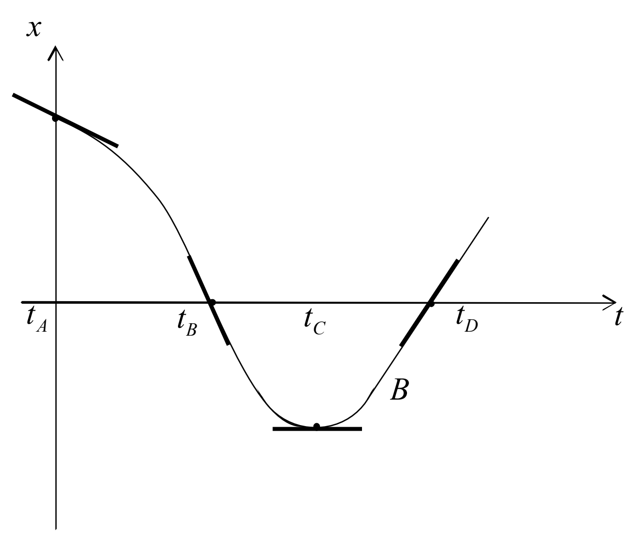
De manera análoga al punto B, la posición es nula, la velocidad negativa y la aceleración nula.

En la figura inferior se muestra un diagrama que representa el movimiento y una tabla que resume lo anteriormente expuesto



Instante	Posición	Velocidad	Aceleración
A	$x < 0$	$v > 0$	$a > 0$
B	$x = 0$	$v > 0$	$a = 0$
C	$x > 0$	$v = 0$	$a < 0$
D	$x = 0$	$v < 0$	$a = 0$

Para la partícula B, en el gráfico adjunto se ha marcado la pendiente de la recta tangente a cada punto estudiado.



- Para $t=t_A$

Se observa que la partícula se encuentra en la parte positiva del eje x, la pendiente de la recta tangente en ese punto es negativa, al igual que la velocidad en ese instante y puesto que en el punto B la pendiente es negativa y mayor en magnitud que en A, la aceleración es también negativa. Otra forma de obtener este resultado es a partir de la curvatura de la función posición, ya que en este tramo la función es cóncava hacia abajo.

- Para $t=t_B$

La partícula se encuentra en x=0, su velocidad es negativa, y su aceleración nula, puesto que la posición aumenta linealmente, luego la velocidad es contante.

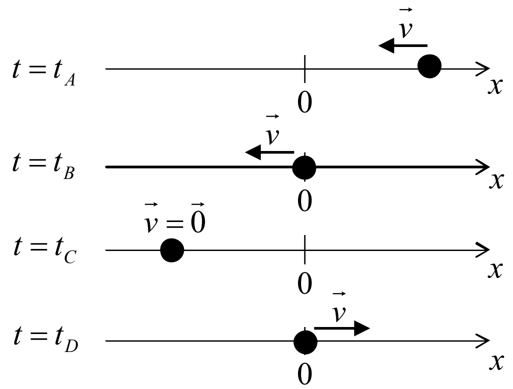
- Para $t=t_C$

La partícula se encuentra en la parte negativa del eje x, la pendiente de recta tangente en ese punto es nula, entonces la velocidad es nula y la aceleración positiva, ya que se observa que en D la velocidad es positiva, idéntico resultado se obtiene de la observación de que la función posición es cóncava hacia arriba.

- Para $t=t_D$

De manera análoga al punto B, la posición es nula, la velocidad positiva y la aceleración nula.

En la figura inferior se muestra un diagrama que representa el movimiento y una tabla que resume lo anteriormente expuesto



Instante	Posición	Velocidad	Aceleración
A	$x > 0$	$v < 0$	$a < 0$
B	$x = 0$	$v < 0$	$a = 0$
C	$x < 0$	$v = 0$	$a > 0$
D	$x = 0$	$v > 0$	$a = 0$

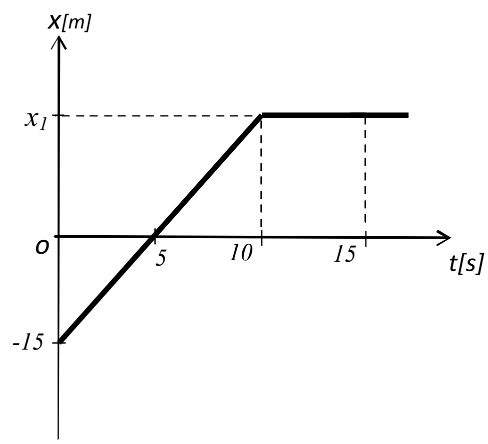
Ejemplo 3.6 El gráfico muestra la variación de la posición de una partícula en el tiempo que se mueve sobre el eje x

a) Describa cualitativamente el movimiento de la partícula

b) Obtenga una expresión para la posición de la partícula, en función del tiempo, indicando su rango de validez

c) Determine la posición de la partícula en t=14[s]

d) Fundamente la siguiente aseveración: "Entre t=0 y t=7[s], la partícula avanzó sin devolverse".



Solución

a) El gráfico muestra la posición de una partícula que se mueve en el eje "x" en función del tiempo. La partícula se encuentra inicialmente en la parte negativa del eje x, específicamente en $x=-15$[m], y avanza en la dirección +x con velocidad constante hasta $t=10$[s], cuando la partícula se detiene y permanece en esa posición ($x=x_1$)

b) Como la partícula se mueve con velocidad constante en el intervalo o<t<10[s], entonces

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-(-15)}{5-0} = \frac{15}{5}$$

$$v_x = 3[m/s]$$

La posición de la partícula puede escribirse como

$$x = \begin{cases} (-15+3t)[m], & \text{para } 0 \le t \le 10 \\ x_1[m], & \text{para } t \ge 10 \end{cases}$$

c) Para t=14[s], la partícula se encuentra en x_1, con

$$x_1 = x(10) = -15 + 3 \cdot 10$$

$$x_1 = 15[m]$$

d) En efecto, la partícula avanza desde $x = -15$[m] a $x = 15$[m] entre $t = 0$ y $t = 10$[s], pues la pendiente de la curva es positiva y constante en dicho intervalo de tiempo.

Ejemplo 3.7 Dos partículas, ***A*** y ***B***, se mueven sobre el eje *x* por pistas paralelas. En el gráfico adjunto se muestra rapidez v/s tiempo para cada partícula.

a) Describa cualitativamente ambos movimientos.

Determine:

b) La rapidez máxima y mínima de cada partícula.

c) La rapidez instantánea en $t=10$[s]

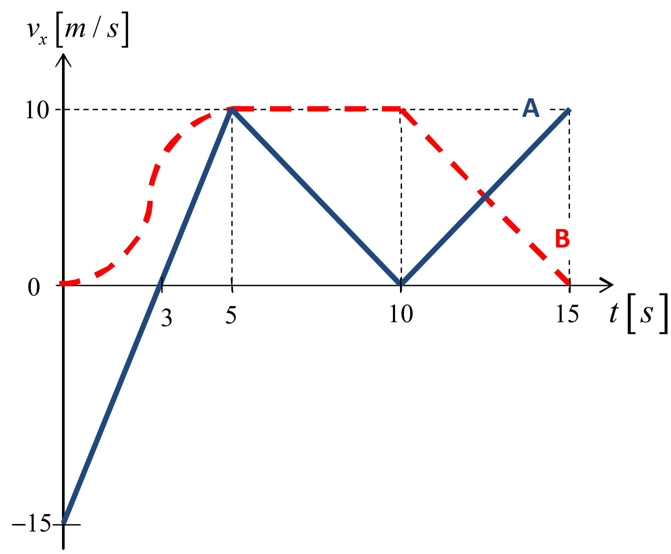
d) La aceleración media entre $t=0$ y $t=5$[s]

e) La aceleración instantánea en $t=7$[s].

f) El o los instantes en que ambas partículas tienen la misma rapidez

g) Estime que distancia separa a las partículas en $t=15$[s], si ambas parten del mismo lugar.

h) Fundamente la veracidad de la siguiente expresión: "entre $t=5$ y $t=10$[s] la partícula "B" permanece en reposo sin moverse"



Solución

a) Partícula A: Inicialmente su velocidad es negativa y su magnitud disminuye linealmente hasta llegar a cero en t=3[s], luego cambia de dirección y comienza a aumentar la velocidad hasta llegar a un punto de inflexión (t=5[s]) cuando comienza a disminuir nuevamente la magnitud de la velocidad hasta llegar a cero y volver a aumentar en t=10[s]
Partícula B: Parte del reposo, y aumenta la velocidad hasta t=5[s] cuando ella se vuelve constante hasta t=10[s], instante en el cual la magnitud de la velocidad comienza a disminuir hasta llegar a cero en t=15[s], siempre viajando en la misma dirección

b) A partir de la inspección de gráfico

$$v_{máx,A} = 15[m/s] \qquad v_{mín,A} = 0$$
$$v_{máx,B} = 10[m/s] \qquad v_{mín,B} = 0$$

c)
$$v_A(10) = 0$$
$$v_B(10) = 10[m/s]$$

d)
$$a_A = \frac{10 - -15}{5-0} = \frac{25}{5}$$
$$a_A = 5[m/s^2]$$
$$a_B = \frac{10-0}{5-0} = \frac{10}{5}$$
$$a_B = 2[m/s^2]$$

e) $$a_A(7) = \frac{0-10}{10-5} = \frac{-10}{5}$$

$a_A(7) = -2[m/s^2]$, pues la aceleración de A es constante entre t=*5* y t=*10*[s]

$a_B(7) = 0$, pues la velocidad no cambia entre t=*5* y t=*10*[s]

f) Para t=*5*[s] $v_A = v_B = 10[m/s]$.

Entre t=10 y t=15[s] hay un instante en que la velocidades son iguales, la aceleración en ese intervalo de tiempo para cada partícula es

$$a_A = \frac{10-0}{15-10} = 2[m/s^2]$$

$$a_B = \frac{0-10}{15-10} = -2[m/s^2]$$

Además considerando el instante t=10[s] como el comienzo de un nuevo movimiento, que $v = v_0 + at$ y que las velocidades deben ser iguales, se puede expresar

$$2t' = 10 - 2t'$$
$$t' = 2,5[s]$$

Luego sus velocidades son iguales en

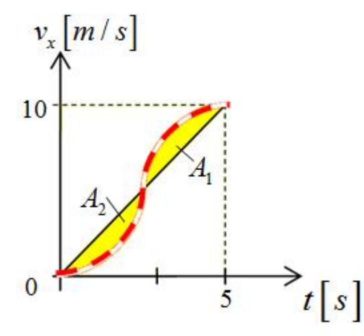
t=*12,5[s]* $v_A = v_B = 5[m/s]$.

g) El "área bajo la curva" del gráfico dado permite determinar la distancia recorrida por cada partícula durante los primeros 15[s]

$$x_A = -\frac{15\cdot 3}{2} + \frac{10\cdot 7}{2} + \frac{10\cdot 5}{2}$$
$$x_A = 37,5[m]$$

Para la partícula B, la velocidad promedio entre t=0 y t=5[s] es 5[m/s], luego

$$x_B = 5\cdot 5 + 10\cdot 5 + \frac{10\cdot 5}{2}$$
$$x_B = 100[m]$$



Otra forma de calcular la distancia recorrida entre t=0 y t=5[s] esto es a partir del área bajo curva, en la figura se muestra que el área A1 es igual a A2, luego la distancia recorrida total es

$$x_B = \frac{5\cdot 10}{2} + 10\cdot 5 + \frac{10\cdot 5}{2}$$
$$x_B = 100[m]$$

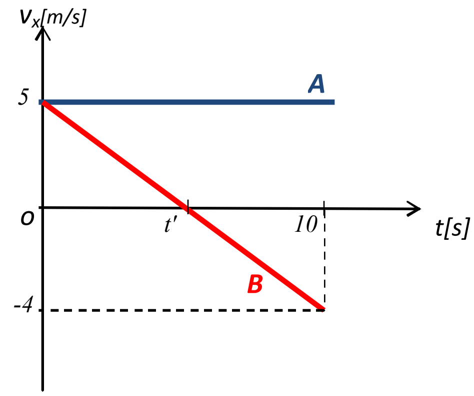
La distancia que separa las partículas es

$$x_B - x_A = 100 - 37,5$$
$$x_B - x_A = 62,5[m]$$

h) La afirmación es falsa, pues en el intervalo citado la partícula se sigue moviendo con velocidad constante.

Ejemplo 3.8 Dos partículas, ***A*** y ***B***, se mueven sobre el eje *x* por pistas paralelas. En el gráfico adjunto se muestra rapidez v/s tiempo para cada partícula. Determine:

a) La aceleración de cada partícula
b) La distancia recorrida y la posición de cada partícula, al final de los primeros 10[s]
c) La distancia entre ellos en *t=0*[s], considerando que las partículas se cruzaron en *t=6*[s].



Solución

El gráfico muestra que la partícula A se mueve con velocidad constante, mientras que la partícula B está disminuyendo la magnitud de su rapidez, moviéndose en la dirección +x. La rapidez llega a cero, y la magnitud de la velocidad comienza a aumentar pero en sentido contrario (-x). En esta situación no se conocen las posiciones iniciales de las partículas. Luego,

a) Al tratarse de un gráfico de rapidez v/s tiempo, la pendiente de la curva corresponde a la aceleración de la partícula. Luego, para la partícula A

$$a_{A,x} = \frac{v_{A,2} - v_{A,1}}{t_2 - t_1} = \frac{5-5}{10-0}$$

$$a_{A,x} = 0$$

Para la partícula B

$$a_{B,x} = \frac{v_{B,2} - v_{B,1}}{t_2 - t_1} = \frac{-4-5}{10-0}$$

$$a_{B,x} = -0,9\left[m/s\right]$$

b) El distancia recorrida por cada partícula puede hallarse a partir del área bajo la curva del gráfico rapidez v/s tiempo. Para la partícula A, corresponde a el área de un rectángulo,

$$d_A = v_{A,x} \cdot t = 5 \cdot 10$$

$$d_A = 50[m]$$

Y la posición de la partícula en *t=10*[s] es

$$x_A(10) = \left(x_A(0) + 50\right)[m]$$

Para la partícula B, corresponde a la suma de las áreas de dos triángulos, es decir,

$$d_B = \frac{v_{B,x} \cdot t'}{2} + \frac{v_{B,x} \cdot t'}{2}$$

Donde *t'* se obtiene haciendo nula la función *v(t)*

$$v(t) = 5 - 0,9t' = 0$$

$$t' = 5,6\left[s\right]$$

$$d_B = \frac{v_{B,x} \cdot t'}{2} + \frac{v_{B,x} \cdot t'}{2} = \frac{5 \cdot 5,6}{2} + \frac{4 \cdot 5,6}{2}$$

$$d_B = 25,2[m]$$

La posición de la partícula en t=10[s] es

$$x_B(10) = x_B(0) + \frac{v_{B,x} \cdot t'}{2} - \frac{v_{B,x} \cdot t'}{2} = \frac{5 \cdot 5{,}6}{2} - \frac{4 \cdot 5{,}6}{2}$$

$$x_B(10) = \left(x_B(0) + 2{,}8\right)[m]$$

c) Las posiciones de cada partícula en función del tiempo pueden expresarse como

$$x_A = x_A(0) + 5 \cdot t$$

$$x_B = x_B(0) + 5 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot t^2$$

Además, se sabe que las partículas se cruzan en t=6[s], es decir en ese instante las posiciones son iguales, vale decir,

$$x_A = x_B$$

$$x_A(0) + 5 \cdot t = x_B(0) + 5 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot t^2$$

$$x_B(0) - x_A(0) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot 6^2$$

$$x_B(0) - x_A(0) = 16{,}2[m]$$

3.8.4 Casos particulares

3.8.4.1Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.)

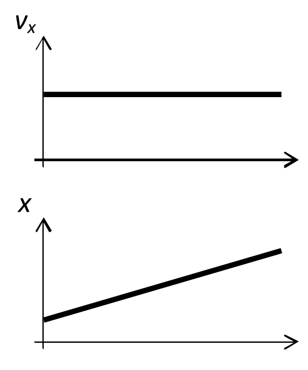
El M.R.U es un caso particular del M.R.U.A. ya que el primero ocurre cuando la aceleración es constante e igual a cero. Así, la posición de la partícula está dada por

$$x = x_0 + v_{0_x} \cdot t$$

Como la aceleración es nula, entonces

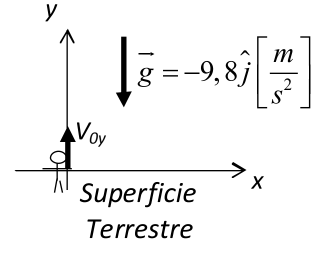
$$v_x = v_{0_x}$$

La representación gráfica para la componente x de la velocidad en función del tiempo y el correspondiente gráfico de la posición en función del tiempo se muestran en la figura adjunta



3.8.4.2 Cuerpos en caída libre.

Este tipo de movimiento rectilíneo se presenta cuando una partícula se mueve sobre la vertical en las cercanías de la superficie terrestre, siempre que se desprecien los efectos del aire (roce viscoso) sobre la partícula en movimiento. Con esta hipótesis de trabajo, se encuentra que las partículas se mueven con una aceleración constante de magnitud aproximadamente igual a 9,8[m/s²] y que vectorialmente se expresa como $\vec{g} = -9{,}8\hat{j}\left[m/s^2\right]$ si se tiene presente el sistema de referencia mostrado en la figura adjunta.



Las relaciones para una partícula en caída libre están dadas por

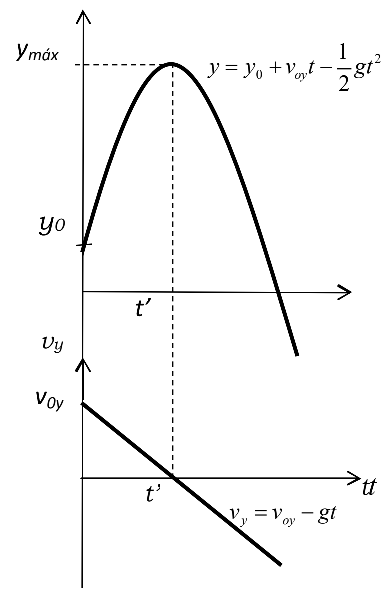
$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$v_y = v_{0_y} + a_y \cdot t = v_{0_y} - 9{,}8 \cdot t$$

$$2(-9{,}8)(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$

$$y = y_0 + \left(\frac{v_{0y} + v_y}{2} \right) t$$

Un asunto importante a determinar, cuando se lanza una partícula verticalmente hacia arriba, es conocer cuánto tiempo tarda la partícula en subir, y cuál es la altura máxima que alcanza. Para responder estas preguntas es importante notar que cuando la partícula llega al punto más alto de su corrido sobre el eje y, su velocidad instantánea es nula $(v_y = 0)$ y luego comienza a descender. En la figura adjunta se muestra un gráfico posición v/s tiempo para una partícula cuya posición está dada por la función $y = y_0 + v_{0y} y - \frac{1}{2} g t^2$ y simultáneamente se muestra el correspondiente gráfico velocidad sobre el eje y v/s tiempo, donde se marca esta condición. A partir de esto, se puede determinar el tiempo de ascenso *t'*,



$$v_y = v_{0_y} - g \cdot t' = 0$$

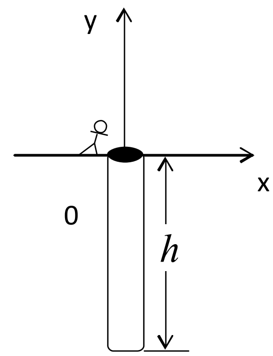
$$\frac{v_{0_y}}{g} = t'$$

Con este valor para el tiempo se puede determinar la máxima altura que alcanza la partícula, para lo cual se procede de la manera siguiente:

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t' - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t'^2$$

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot \left(\frac{v_{0_y}}{g} \right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_{0_y}}{g} \right)^2$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} \frac{{v_{0_y}}^2}{g}$$



Ejemplo 3.9 Un niño deja caer una piedra desde el borde superior de un pozo. Luego de 5.0 [s] la piedra golpea el piso. Determine:

a) La aceleración de la piedra.
b) La rapidez de la piedra justo antes de chocar contra el piso.
c) La profundidad del pozo.
d) El tiempo que tarda el sonido producido por el choque en ser escuchado por el niño, si la rapidez del sonido en el aire es constante y de 340 m/s.
e) El tiempo total desde que el niño soltó la piedra hasta que escucha el sonido del choque.

Solución

a) Al dejar caer la piedra en caída libre, su aceleración tiene magnitud 9,8 [m/s²].

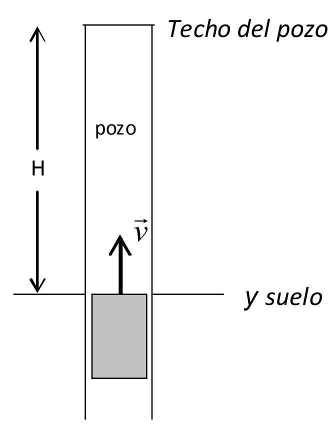
b)
$$v_y = v_{0_y} + a_y t = 0 - gt$$
$$v_y = -9.8 \times 5.0$$
$$v_y = -49\left[m/s\right]$$

c)
$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$y = -\frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2 = -\frac{1}{2} 9.8 \cdot \left(5.0\right)^2 = -0{,}12[km]$$
$$h = 0.12[km]$$

d)
$$t_S = \frac{h}{v_s} = \frac{0.12 \times 10^3}{340}$$
$$t_S = 0.35s$$

e)
$$t_T = t_b + t_s = 5 + 0.35$$
$$t_T = 5.4s$$

Ejemplo 3.10 En un edificio de departamentos, un ascensor sube desde el estacionamiento subterráneo con una rapidez constante v = 2,5 [m/s]. En cierto instante (t = 0), se desprende un perno desde la parte superior del pozo del ascensor justo cuando el techo del ascensor pasa por el nivel del suelo del primer piso. Si la altura del pozo hasta el nivel del primer piso es H = 50[m], determine:



a) El instante en que el perno impacta al ascensor que va subiendo,
b) La altura, respecto del nivel del suelo del primer piso, a la que se produce el impacto,
c) La velocidad del perno en el instante en que impacta al ascensor.

Solución

a) La ecuación de posición del techo del ascensor es

$$y_A = v_A \cdot t = 2,5 \cdot t$$

La ecuación de posición del perno es

$$y_P = H - \frac{1}{2}gt^2 = 50 - 5t^2$$

El perno impacta al ascensor cuando sus posiciones son iguales, es decir,

$$y_A = y_P$$

lo que conduce a

$$2,5t = 50 - 5t^2$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado, se halla t = 2,92 [s] y t = - 3,42 [s]. Así, el perno impacta al piso del ascensor en

$$t = 2,92 \text{ [s]}$$

b) La altura pedida es

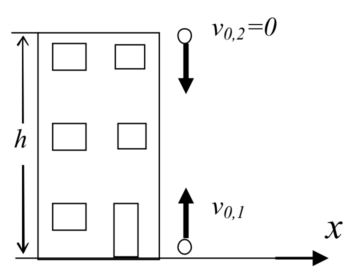
$$y_A = 2,5 \cdot 2,92 = 7,3[m]$$

c) La velocidad pedida es

$$v_P = -g \cdot t = -10 \cdot 2,92 = -29,2 \ [m/s]$$

donde el signo "-" indica que el perno va descendiendo.

Ejemplo 3.11 Una bola se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, al mismo tiempo una segunda bola se suelta desde la azotea de un edificio. Cuando las dos bolas se encuentran y la rapidez de la segunda bola es cuatro veces la rapidez de la primera bola. Determine en que fracción de la altura del edificio ocurre el encuentro de las dos bolas.



Solución

Considerando el suelo como origen del sistema de coordenadas, la posición de la primera bola puede escribirse:

$$y_1 = v_{0,1}t - \frac{1}{2}gt^2$$

y para la segunda bola:

$$y_2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Derivando ambas ecuaciones se encuentra la rapidez instantánea en función del tiempo para ambas bolas:

$$v_1 = v_{0,1} - gt$$

$$v_2 = -gt$$

La primera condición del problema indica que la posición de ambas bolas es la misma, luego:

$$y_1 = y_2$$

$$v_{0,1}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0,1}t = h \tag{1}$$

Además la rapidez de la segunda bola es cuatro veces la rapidez de la primera

$$v_2 = 4v_1$$

$$-gt = \left(v_{0,1} - gt\right)4$$

$$v_{0,1} = \frac{3}{4}gt$$

Reemplazando la expresión (2) en la (1),

$$h = \frac{3}{4}gt^2$$

Entonces

$$t^2 = \frac{4h}{3g}$$

Reemplazando este tiempo en la ecuación de la posición de la bola 2 se obtiene:

$$y_2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{4h}{3g}\right) = h - \frac{2h}{3} = \frac{1}{3}h$$

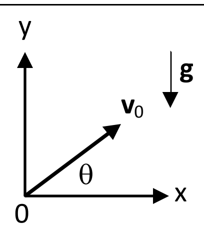
Las bolas se encuentran a un tercio de la altura del edificio.

3.9 Lanzamiento de proyectiles

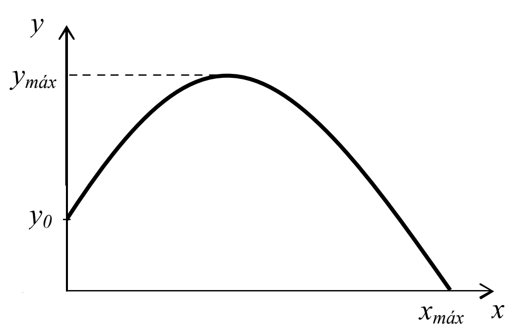
El principio de superposición de Galileo relativo al movimiento de proyectiles, establece que

> ***"Si el movimiento de un cuerpo es el resultado de otros dos movimientos simultáneos, la posición que ocupa al cabo de un tiempo t es la misma que ocuparía si ambos movimientos se hubiesen cumplido sucesiva e independientemente uno de otro y cada uno de ellos durante el mismo tiempo t"***

Esto quiere decir, que el lanzamiento de un proyectil corresponde a un movimiento en dos dimensiones (por lo general en el plano *x,y*), donde, componente se trata por separado, en el eje *x* tiene lugar un MRU y en el eje *y un MRUA*. Además se desprecian los efectos de roce del aire y se considera que el desplazamiento del proyectil es mucho menor que el radio de la tierra, el movimiento en el eje *x*, tendrá aceleración constante e igual a cero y el movimiento en el eje *y*, tendrá aceleración constante e igual a la aceleración de gravedad (g = 9,8[m/s²]). Cuantitativamente las relaciones para cada eje se expresan como:

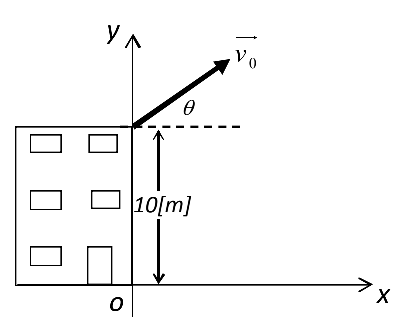
		Eje x	Eje y
	Aceleración	$a_x = 0$	$a_y = g = -9,8[\mathrm{m/s^2}]$
	Velocidad	$v_x = v_{0x} = v_o \cos\theta$	$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$
	Posición	$x = v_{0_x} \cdot t$	$y = v_{0_y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Al lanzar un proyectil, esté describe una trayectoria parabólica en el plano *x,y*, donde y_0, corresponde a la posición inicial en el eje *y*, $y_{máx}$ es la posición máxima o altura máxima sobre el eje *y* y $x_{máx}$, es el alcance del proyectil o la distancia máxima que alcanza sobre el eje *x*



Ejemplo 3.12 Desde un edificio de 10.0[m] de altura se lanza un proyectil, con una velocidad inicial de 5.0[m/s] formando un ángulo de 30° con la horizontal. Determine:

a) Las componentes ortogonales de la velocidad inicial
b) El tiempo de vuelo del proyectil
c) La velocidad junto antes de tocar el piso
d) La altura máxima alcanzada por el proyectil
e) El alcance del proyectil



Solución

Se sabe que el movimiento parabólico de un proyectil resulta de la superposición de un MRU horizontal y de un MRUA vertical. Se desprecia la presencia del aire y se supone que la aceleración de gravedad es constante para toda la trayectoria del balón.

a) Las componentes ortogonales de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 5,0 \cdot \cos 30° = 4,3[m/s]$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta = 5,0 \cdot \operatorname{sen} 30° = 2,5[m/s]$$

b) El proyectil "dejará de volar" cuando su posición "y" sea nula, al utilizar esta condición y la relación de la posición en el eje y, se tiene

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 10,0 + 2,5 \cdot t - \frac{1}{2} 9,8 \cdot t^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se encuentra

$$t_1 = -1,2[s]$$

$$t_2 = 1,7[s]$$

La primera solución no tiene sentido en Física, pues correspondería a un tiempo previo al lanzamiento del proyectil. Luego el tiempo de vuelo es 1,7[s]

c) Justo antes de chocar con el suelo, la velocidad en el eje x es v_{0x} (constante durante todo el vuelo), y la velocidad en el eje y es

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = 2,5 - 9,8 \cdot 1,7$$

$$v_y = -14,2[m/s]$$

El módulo de la velocidad justo antes de chocar con el piso es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4,3^2 + (-14,2)^2}$$

$$v = 14,8[m/s]$$

Y forma un ángulo ϕ con la horizontal. Dado por

$$\phi = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{-14,8}{4,3}\right)$$

$$\phi = 73,8°$$

d) Se sabe que para que el proyectil alcance la altura máxima, la rapidez en el eje y del proyectil debe ser nula, es decir,

$$v_y = 2,5 - 9,8 \cdot t' = 0$$

Entonces el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima es

$$t' = \frac{2,5}{9,8}$$

$$t' = 0,26[s]$$

Reemplazando este valor en la relación de la posición se tiene

$$y_{máx} = 10,0 + 2,5 \cdot t' - \frac{1}{2} 9,8 \cdot t'^2 = 10,0 + 2,5 \cdot 0,26 - \frac{1}{2} 9,8 \cdot 0,26^2$$

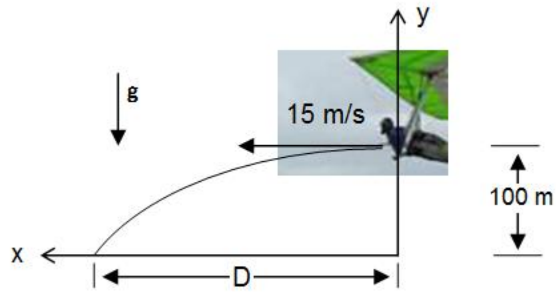
$$y_{máx} = 10,3[m]$$

e) El alcance corresponde a la distancia recorrida sobre el eje x, durante el tiempo de vuelo, entonces

$$x_{máx} = v_{0_x} \cdot t_2 = 4,3 \cdot 1,7$$

$$x_{máx} = 7,4[m]$$

Ejemplo 3.13 Un piloto en alas delta vuela a 15,0 [m/s] en dirección paralela al suelo y a una altura de 100 [m] . Su misión es dejar caer una caja de provisiones en un campamento de scouts. ¿A qué distancia del campamento debe soltar la caja para que cumpla su misión? ¿Qué suposición se ha hecho para resolver esta situación?



Solución

El movimiento de la caja de provisiones, una vez que se suelta, resulta de la superposición del movimiento rectilíneo (horizontal) uniforme y del movimiento rectilíneo (vertical) uniformemente acelerado.

Para el movimiento vertical de la caja se tiene

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

donde y_0 = 100 [m], $v_{0y} = 0$ (dado que la velocidad inicial sólo tiene componente horizontal) y, g = - 9,8 [m/s²] (pues en este caso $\vec{g}$ = -9,8 $\hat{j}$ [m/s²]).
Cuando la caja llega al suelo, $y = 0$. Luego,

$$0 = 100 - 4,9t^2$$

$$t = 4,52[s]$$

Para el movimiento horizontal de la caja se tiene

$$x = v_{0x}t$$

Entonces,

$$D = 15 \cdot 4,52$$

$$D = 67,8[m]$$

La distancia entre el punto en que se soltó la caja y el punto donde cayó está dado por

$$d = \sqrt{67,8^2 + 100^2}$$

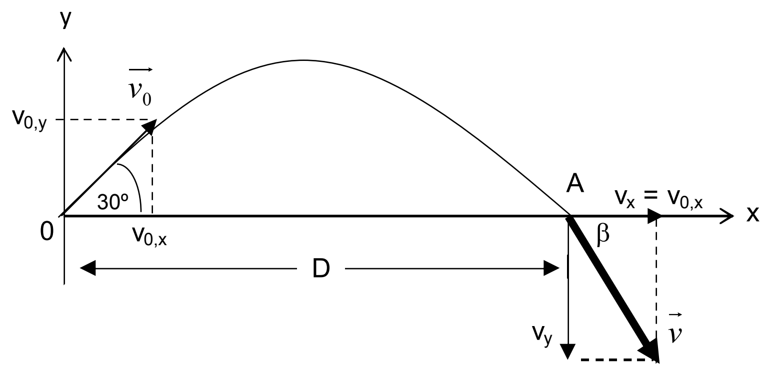
$$d = 121[m]$$

Para resolver este problema se ha supuesto que la caja describe una parábola.

Ejemplo 3.14 En un "tiro libre", la pelota sale del botín del jugador con una rapidez inicial de 100,0 [m/s] y forma un ángulo (ángulo de tiro) de 30,0° con la horizontal. Determine:

a) La distancia entre el punto de lanzamiento 0 y el punto de regreso a tierra A.

b) La magnitud de la velocidad de la pelota cuando regresa a tierra y el ángulo que forma con el semieje +x.



Solución

a) Para el movimiento vertical, se tiene

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

donde $y_0 = 0$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} 30° = 100,0 \operatorname{sen} 30° = 50,0[m/s]$

Cuando el balón regresa a tierra

$$0 = 50 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$$

Se requiere un tiempo de *t = 10,2 [s]*

Pero $D = v_{0x} t$, con $v_{0,x} = v_0 \cos 30° = 100,0 \cos 30° = 86,6[m/s]$

Luego

D = 86,6 • 10,2 = 883 [m] es la distancia $\overline{OA}$ pedida

b) La magnitud de la velocidad cuando la pelota regresa justo a tierra está dada por

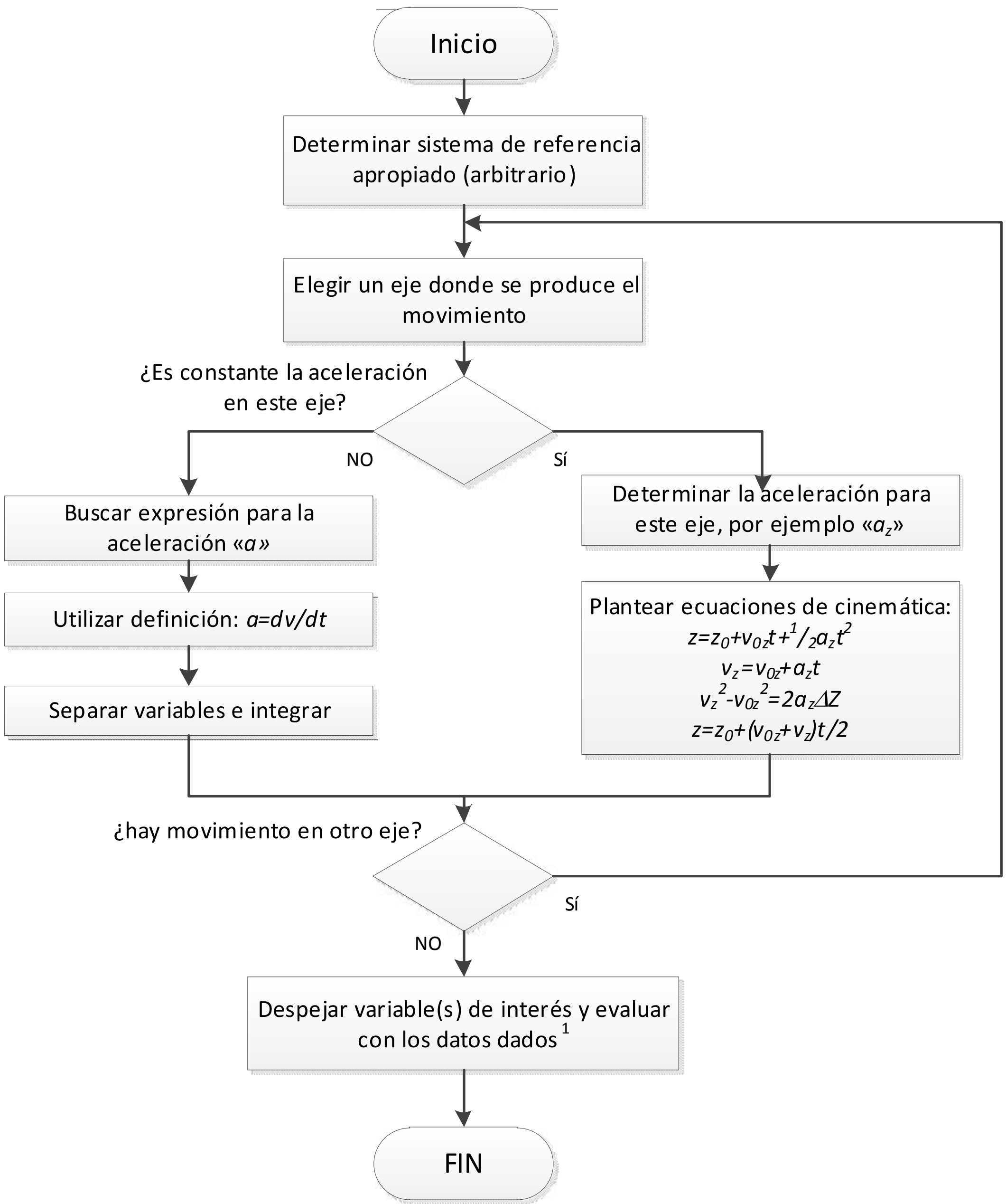
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - gt\right)^2} = \sqrt{86,6^2 + \left(50,0 - 9,8 \cdot 10,2\right)^2}$$

$$v = 100[m/s]$$

El ángulo que forma la velocidad final con el semieje +x es

$$\beta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{|-49,96|}{50,0}\right) = 45°$$

3.10 Diagrama de flujo para problemas de cinemática en una o más dimensiones



[1] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

3.10 Ejercicios Propuestos

01) Un vehículo se mueve con rapidez de 25[km/h] durante 4.0 [min], luego a 50[km/h] por 8.0 [min], y finalmente a 20[km/h] durante 2.0 [min]. Determine: a) la distancia total recorrida en km y b) la rapidez promedio de todo el viaje en m/s.

R.: a) 9.0km; b) 10.7m/s

02) Dos partículas se encuentran separadas por una distancia de 80 [m] y se mueven en ruta de colisión con rapideces de 4 y 6 [m/s]. Determine el tiempo tardará en producirse el choque si ambas partículas parten al mismo tiempo.

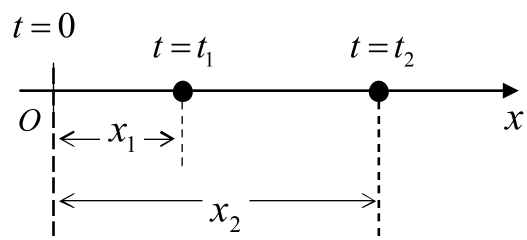
R.: 8[s]

03) Un piloto de autos de carrera debe promediar 200,0[km/h] durante el transcurso de una competencia de 10 vueltas. Si las primeras nueve vueltas las recorrió a 198,0[km/h], determine la rapidez promedio de la última vuelta para que el piloto pueda cumplir el objetivo planteado

R.: 220[km/h]

04) Un automóvil viaja a lo largo de la recta *ox* con movimiento uniformemente acelerado. En los instantes t_1 y t_2 sus posiciones son x_1 y x_2, respectivamente: demuestre que la aceleración del automóvil está dada por

$$a = \frac{2\left(x_2 t_1 - x_1 t_2\right)}{t_1 t_2\left(t_2 - t_1\right)}$$



05) Un tren parte del reposo y viaja con aceleración constante. En un momento dado está viajando a 33,0 [m/s] y 160 [m] más adelante lo hace a 54,0 [m/s]. Calcule: a) la aceleración del tren; b) el tiempo requerido para recorrer los 160 [m]; c) el tiempo requerido para alcanzar la velocidad de 33,0 [m/s]; d) la distancia recorrida desde el reposo hasta que alcanza la velocidad de 33,0 [m/s].

R.: a) 5,71 [m/s^2] ; b) 3,68 [s]; c) 5,78 [s]; d) 95,4 [m]

06) Un tren de 105[m] de longitud acelera uniformemente desde el reposo. El frente de la máquina del tren tiene una rapidez de 20,0[m/s] cuando pasa frente a un poste que se encuentra a 180[m] de donde partió el tren. Halle la rapidez del extremo final del último carro, cuando pasa frente a ese mismo poste.

R.: 25,2[m/s]

07) Una manzana se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 20[m/s]. Determine el instante (los instantes) en que la manzana tendrá una velocidad de magnitud igual a 6,0[m/s] y la altura, respecto al punto de lanzamiento, donde tendrá ese valor.

R.: 1,43[s] y 2,65[s]; 18,6[m]

08) Unos astronautas “aterrizan” en un planeta de nuestro sistema solar. Ellos observan que una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez de 14,6 [m/s] tarda 7,72 [s] en regresar al suelo. ¿Cuál es la aceleración de gravedad (magnitud) en dicho planeta? ¿Cuánto demoraría en caer aquí en la Tierra?

R.: 3,78 [m/s^2] ; 3 [s]

09) Pablo lanza una bola verticalmente con una rapidez 1,5 veces mayor que Danilo. Determine cuantas veces más alto subirá el objeto de Pablo en comparación con el de Danilo.

R.: 6,3 veces

10) Se deja caer una piedra, sin velocidad inicial, desde el borde superior de un pozo. A los 5,0 [s] se escucha el ruido que la piedra hace al chocar con el agua. Determine la profundidad del pozo teniendo en cuenta que la velocidad del sonido en el aire es de 340 [m/s].

R.: 110 [m]

11) Un cuerpo que cae libremente recorre 224[pie] en el último segundo de movimiento. Admitiendo que el cuerpo fue soltado, determine la altura desde la cual ha caído y qué tiempo le ha tomado llegar al suelo.
(La magnitud de la aceleración de gravedad es 32,2[pie/s^2]

R.: 896[pie]; 7,46[s]

12) Una esferita cae libremente. Desprecie el roce viscoso con el aire y demuestre que la distancia que recorre el objeto durante el n-ésimo segundo de caída es

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)g$$

13) Suponga que ajusta el pitón o boquilla de una manguera de jardín para obtener un fuerte chorro de agua. El chorro se lanza verticalmente hacia arriba, a una altura de 1,5[m] sobre el suelo. Cuando mueve rápidamente el pitón alejándolo de la vertical, se escucha que el agua golpea el suelo junto a usted 2,0[s] después. Determine la rapidez del agua al salir del pitón

R.: 9,3[m/s]

14) Por una ventana, a 28,0[m] sobre la vereda, se ve pasar hacia arriba una pelota de tenis con una rapidez vertical de 12,0[m/s]. Si la pelota fue lanzada desde la calle, determine: a) la rapidez de lanzamiento; b) el tiempo que requiere para volver al punto de lanzamiento.

R.: a) 26,3[m/s]; b) 5,4[s]

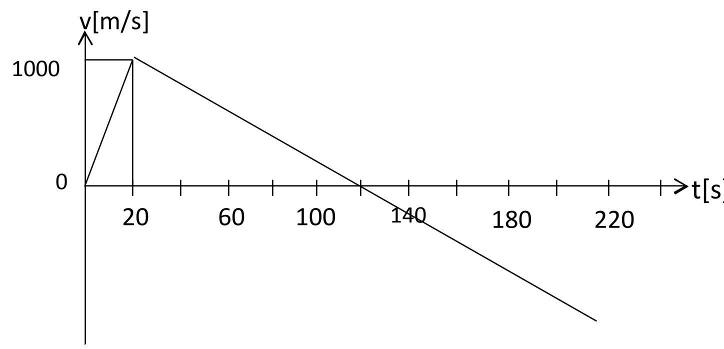
15) Un saco de arena se cae desde un globo aerostático que va ascendiendo verticalmente con una rapidez constante de 6 [m/s]. Si el saco tarda 8,0 [s] en llegar al suelo, determine la velocidad del saco en el momento en que llega al suelo y la altura del globo, medida desde el suelo, en ese instante.

R.: -74 [m/s] ; 272 [m]

16) Desde un helicóptero que se mueve verticalmente se suelta una bolsa de correo. La posición de la bolsa en función del tiempo está dada por la ecuación $y = 50 + 1{,}5t - 5t^2$, donde y está en [m] y t en [s]. (t = 0 corresponde al instante en que la bolsa se suelta, $y = 0$ corresponde al nivel del suelo) a) ¿Qué representan las constantes en la ecuación anterior? De acuerdo con esto, en el instante en que la bolsa se suelta, ¿está ascendiendo o descendiendo el helicóptero? ¿Por qué? b) ¿Cuánto demora la bolsa en llegar al suelo? c) ¿Qué distancia recorre la bolsa desde que se suelta hasta que llega al suelo? d) Determine la velocidad de la bolsa cuando toca el suelo.

R.: a) El helicóptero va subiendo; b) 3,3 [s]; c) 50,2 [m]; d) –31,7 [m/s]

17) Un cohete se lanza verticalmente al espacio. A los 20 [s] de su lanzamiento, se agota el combustible y el cohete continúa moviéndose bajo la acción de la aceleración de gravedad. El gráfico que representa la velocidad del cohete en función del tiempo para todo el movimiento es el siguiente:

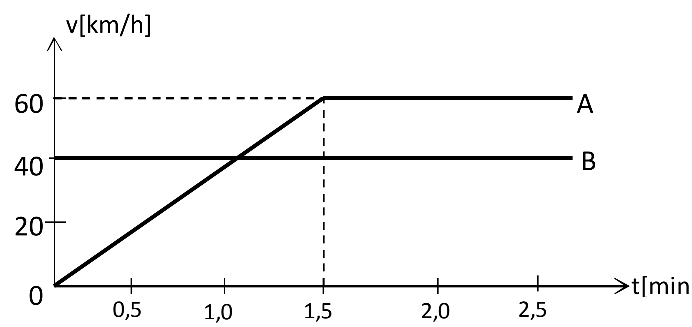


Determine: a) la aceleración del cohete mientras se agota el combustible; b) la altura a la cual llega el cohete mientras el combustible se quema; c) la altura máxima alcanzada por el cohete; d) el tiempo transcurrido desde el lanzamiento del cohete hasta que vuelve al punto de partida.

R.: a) 50 [m/s²] ; b) 10000 [m]; c) 60000 [m] ; d) aprox 230 [s]

18) El gráfico mostrado corresponde a la siguiente situación: el automóvil A está detenido frente a un semáforo. Se enciende la luz verde y A parte. El automóvil B, que viaja a velocidad constante, lo adelanta en el momento en que A parte.

Determine: a) ¿En qué momento el automóvil A alcanza la velocidad de B? b) En dicho instante, ¿qué ventaja lleva B a A? c) En t = 1,5 min, ¿qué coche está adelantado y en cuánto? d) ¿En qué instante A alcanza a B? e) ¿Qué distancia han recorrido los vehículos, desde el semáforo, al producirse el alcance?



R.: a) 1,0 [min] ; b) 1/3 [km] ; c) B ; 0,25 [km] ; d) 2,25 [min] ; e) [1,5 km]

19) En una noche de Navidad, el Viejo Pascuero se prepara para hacer su última entrega. No obstante, al mirar su reloj, se da cuenta que tan sólo le quedan 5,0 [s] para dejar este último regalo, justo antes de medianoche. Para lograrlo, piensa dejar caer el regalo por la chimenea. Si el Viejo Pascuero vuela horizontalmente en su trineo a 42 [m/s] y a 110 [m] de altura, a) ¿a qué distancia de la chimenea, medida horizontalmente, debe dejar caer el regalo para que llegue justo a ella?, b) ¿alcanza a llegar el regalo a su destino antes de medianoche? (Desprecie la altura de la chimenea)

R.: a) 197 [m]; b) sí

20) Un avión bombardero vuela horizontalmente a una altura de 1,2 [km] con una velocidad de 180 [km/h]. a) ¿Cuánto tiempo antes de que el avión esté sobre el blanco debe dejar caer la bomba? b) ¿Cuál es la velocidad de la bomba al llegar al suelo? c) ¿Cuál es la velocidad de la bomba 10 [s] después de ser soltada? d) ¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando se encuentra a 200 [m] de altura? e) ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje horizontal la velocidad de la bomba al caer al suelo? f) ¿Cuál es la distancia horizontal cubierta por la bomba?

R.: a) 15,7 [s]; b) 161,2 [m/s]; c) 110 [m/s]; d) 147,3 [m/s]; e) –72°; f) 785 [m]

4 *Dinámica de una partícula*

La dinámica estudia las causas de un movimiento, las cuales pueden provocar que una partícula se mueva con un movimiento rectilíneo uniforme o con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o con otro.

4.1 Fuerza

Una fuerza es la causa de que una partícula cambie su velocidad (acelere), cambie su forma, se fracture, etc. Estás pueden ser de contacto, como puede ser un puñete o de largo alcance, como por ejemplo la fuerza de gravedad, que atrae los objetos al suelo.

Las fuerzas en la naturaleza se pueden explicar a partir de cuatro fuerzas fundamentales, las cuales no ser explicadas a partir de ninguna otra, a saber

a) ***Fuerza gravitacional*** Causa de que los objetos con masa ejerzan entre si una fuerza gravitatoria de atracción entre ellos. La magnitud de esta fuerza es proporcional al producto entre las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, y su dirección por la línea recta que las une.

b) ***Fuerza electromagnética*** Responsable de las fuerzas que experimentan cargas eléctricas. Cuando las cargas se encuentran en reposo, la magnitud de la fuerza (electrostática) es proporcional al producto entre las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de las fuerzas está dada por la línea recta que las separa y pueden ser de repulsión o atracción en dependencia de si tienen signos iguales o distintos respectivamente.
Cuando las partículas cargadas se encuentran en movimiento, la fuerza (magnética) ejercida entre ellas es proporcional a las velocidades de las partículas y no necesariamente está en la línea recta que las une.
La superposición de ambas fuerzas se suele llamar fuerza electromagnética

c) ***Fuerza nuclear fuerte*** Actúa a distancias muy pequeñas del orden de 10^{-15}[m], entre las partículas que forman parte de núcleo atómico, (protones y neutrones) y otras partículas llamadas hadrones. Esta fuerza pude ser de atracción o repulsión dependiendo de la distancia entre las partículas y es responsable de la estructura atómica.

d) ***Fuerza nuclear débil*** es la causa del decaimiento beta, que corresponde a la desintegración de núcleos atómicos inestables, en este caso las partículas emitidas son electrones o positrones (electrón positivo) más un neutrino. Además es importante en el control de la velocidad de reacciones nucleares que ocurren en algunas estrellas, por ejemplo nuestro Sol.

Tabla 1 Listado de las fuerzas fundamentales, elementos sobre los que ejercen su acción, distancia a la cual ejercen su acción e intensidad relativa, considerando como unitaria la magnitud de la fuerza nuclear fuerte.

Fuerza	***Ejerce sobre***	***Alcance***	***Intensidad relativa***
Gravitacional	Objetos con masa	infinito	10^{-38}
Electromagnética	Objetos con carga eléctrica	infinito	10^{-2}
Nuclear fuerte	Protones, neutrones entre otros	10^{-15}[m]	1
Nuclear débil	Partículas elementales	10^{-16}[m]	10^{-13}

Cuando varias fuerzas actúan sobre un mismo punto se cumple el principio de superposición que indica que la fuerza total resultante, también llamada fuerza neta, corresponde a la suma (vectorial) de todas las fuerzas aplicadas en ese punto.

$$\vec{F}_{Neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

La unidad de medida en el SI para la fuerza es el Newton [N]

4.2 Leyes de Newton

Las leyes de Newton son las que permiten describir las causas de un movimiento. Dada la importancia del trabajo de Newton "Principios matemáticos de la filosofía natural" (1686) en toda la mecánica clásica, se tomaran los enunciados de sus principios de la traducción al español hecha por el Doctor Igor Saavedra en su libro "*Tiempo, espacio, movimiento Los principia de Newton*" (1978), Editorial Universitaria (referencia N°09)

Los principios de Newton son fundamentales en mecánica, pero no son siempre válidos, estos no se cumplen para rapideces cercanas a la rapidez de la luz (3×10^{8}[m/s]), en este caso se utiliza la teoría de la relatividad, tampoco se aplica en el caso de partículas subatómicas, donde se utiliza la mecánica cuántica y son válidas sólo en sistemas de referencia inerciales.

4.2.1 1° Ley de Newton o Principio de Inercia

> ***"Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en una línea recta a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas aplicadas sobre él."*** [Ref.09, pág. 48]

Un objeto en reposo permanecerá en reposo si la fuerza neta sobre él es cero. Así, un objeto en movimiento, para el cual la sumatoria de fuerzas sobre él es cero, se moverá en línea recta y con velocidad constante, es decir, en MRU.

A partir de la primera ley de Newton se puede afirmar que un sistema de referencia inercial es donde se cumple está ley y un sistema de referencia que se mueva a velocidad constante respecto de un sistema de referencia inercial es también un sistema de referencia inercial.

En un sistema de referencia inercial todas las aceleraciones que experimentas las partículas son efecto de fuerzas ejercidas por objetos identificables. La Tierra, se puede considerar como una buena aproximación de un sistema de referencia inercial.

"Los movimientos de los cuerpos incluidos en un espacio dado son los mismos entre ellos, ya sea que el espacio esté en reposo o que se mueva uniformemente hacia adelante en una línea recta sin ningún movimiento circular."[Ref. 09, pág 56]

En cualquier marco de referencia inercial las leyes de la física son las mismas, es decir, sobre un metro en reposo o el mismo metro en movimiento rectilíneo uniforme (y con sus ventanas cerradas), si se lanza una moneda verticalmente hacia arriba, está caerá verticalmente hacia abajo, una mosca volando hará el mismo esfuerzo por volar en ambos casos y usted no tendría como diferenciar ambos casos a partir de experimentos "físicos"

4.2.2 2° Ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

"El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada, y ocurre en la dirección de la línea recta según la cual se aplica dicha fuerza"[Ref.09, pág. 48]

Para Newton "movimiento" corresponde al producto de una variable que depende del cuerpo (masa) por su velocidad. Si, esta variable es constante entonces, el cambio de "movimiento" es proporcional al cambio de velocidad en un cierto intervalo de tiempo, es decir, a la aceleración. Luego la aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza que se aplica sobre ella y la constante de proporcionalidad es la masa, cuando esta es constante.

En términos sencillos cuando sobre un objeto la sumatoria de fuerzas externas (fuerza neta) que se aplican sobre él es distinta de cero, entonces el objeto se acelera, es decir, cambia su velocidad y la segunda ley de Newton cuando la masa es constante puede expresarse cualitativamente como

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Puede ser conveniente escribir la relación anterior en término de sus componentes escalares. Así

$$\sum F_x = ma_x\,, \qquad \sum F_y = ma_y\,, \qquad \sum F_z = ma_z$$

Al ser la aceleración nula de una partícula es también nula la fuerza neta que actúa sobre ella,

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

luego la partícula se moverá con movimiento rectilíneo uniforme o seguiré en reposo, como ya se había establecido en el primer principio de Newton.

4.2.2.1 Masa

La masa de un objeto es una propiedad natural de todos los cuerpos y define la cantidad de materia del objeto. En mecánica y a partir de la segunda ley de Newton, se puede afirmar que la masa de un objeto, es una medida de la inercia del objeto, es decir, corresponde la “oposición” o “dificultad” que este presenta a ser acelerado. Para una misma fuerza ***F***, será más “difícil” acelerar un objeto de mayor masa, que uno de menor masa, o se puede expresar, que para obtener una misma aceleración ***a***, se debe aplicar una mayor fuerza a una masa mayor y una menor fuerza a una masa de menor magnitud.

En este trabajo, y en la mecánica clásica la masa de un objeto se considera constante y no depende de la velocidad, o posición del objeto. Además la masa de un cuerpo corresponde a la suma de las masas de sus partes constituyentes.

Como la masa en el SI se expresa en kilogramo [kg], entonces se puede definir un Newton como

$$1[N]=1[kg]\cdot 1\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Ejemplo 4.1 Tres fuerzas coplanares actúan sobre una masa m=2,0[kg]. La primera fuerza está dada por $\vec{F}_1=\left(F_{1x}\hat{i}+3\hat{j}\right)[N]$, la segunda fuerza tiene magnitud de 5,0[N] y está a 120° respecto del eje positivo de las *x*, y la tercera fuerza $\vec{F}_3=\left(-3\hat{i}+F_{3y}\hat{j}\right)[N]$. Si la partícula tiene una aceleración $\vec{a}=\hat{i}\left[m/s^2\right]$, determine las compontes desconocidas de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$.

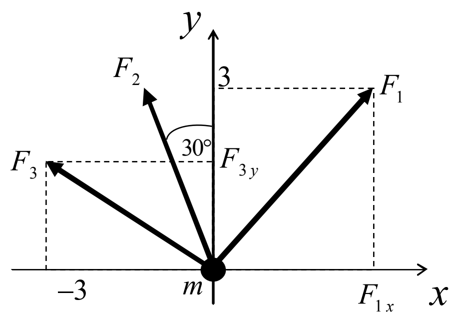
Solución

Dada la segunda ley de Newton,

$$\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{a},$$

en este caso se puede escribir

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=m\vec{a}$$



Como $\vec{F}_1=\left(F_{1x}\hat{i}+3\hat{j}\right)[N]$, $\vec{F}_2=\left(-2,5\hat{i}+4,3\hat{j}\right)[N]$, $\vec{F}_3=\left(-3\hat{i}+F_{3y}\hat{j}\right)[N]$ y $\vec{a}=\hat{i}\left[m/s^2\right]$, entonces

$$\left(F_{1x}-2,5-3,0\right)\hat{i}+\left(3,0+4,3+F_{3y}\right)\hat{j}=2,0\hat{i}$$

Igualando componente a componente, se obtiene

$$F_{1x}-2,5-3,0=2,0$$

$$F_{1x}=7,5[N]$$

y

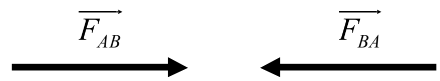
$$3,0+4,3+F_{3y}=0$$

$$F_{3y}=-7,3[N]$$

4.2.3 3° Ley de Newton o Principio de Acción y Reacción

> ***A cada acción se opone siempre una reacción igual: las acciones mutuas que entre si ejercen dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas a partes contrarias.*** *[Ref.09, pág. 48]*

Una fuerza que actúa sobre una masa, hará que esta reaccione y genere una fuerza de igual magnitud y dirección pero sentido opuesto sobre quién la esté aplicando, esto es independiente de si los objetos se mueven o encuentran en equilibrio



Note que en este caso la fuerza resultante no es cero, pues las fuerzas actúan sobre distintos cuerpos. En otras palabras, cuando se habla de “fuerza resultante” o de “fuerza neta” o simplemente “resultante” se entiende que es la fuerza total que obra sobre una misma partícula o cuerpo.

La tercera ley de Newton constituye la base para un principio fundamental en física llamado “conservación de la cantidad de movimiento”, el que establece que si dos o más partículas interactúan, lo harán de tal modo que la cantidad de movimiento inicial (suma de los productos de masa por velocidad, de todas las partículas que interactúan) es igual a la cantidad de movimiento final, este tema se tratará con mayor detalle en la parte 6 de este trabajo.

4.3 Diagrama de cuerpo libre

Un diagrama de cuerpo libre es una representación gráfica que muestra a un objeto como una partícula aislada de su entorno y a todas las fuerzas que actúan sobre él.

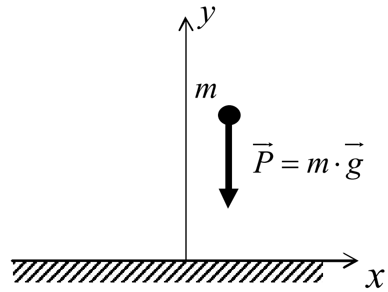
Se debe realizar un diagrama de cuerpo libre para cada objeto de interés, con sus apropiados ejes de referencia. Se dibujan las fuerzas como “flechas” conforme a la situación estudiada, cuidando de incluir todas las fuerzas que actúan sobre el objeto (incluso las que no se conocen de manera explícita), sin incluir las fuerzas que realiza el objeto estudiado sobre otra masa.

Para facilitar la escritura de la segunda ley de Newton en términos de sus componentes rectangulares, se adoptará el convenio de representar los vectores en el diagrama de cuerpo libre en términos de su magnitud.

4.4 Tensión

La tensión corresponde a fuerza que se ejerce al tirar un objeto con una cuerda. En adelante se supondrá que la masa de la cuerda es despreciable e inextensible (cuerda ideal), salvo que se indique lo contrario.

4.5 Fuerza peso $\left(\vec{P}\right)$



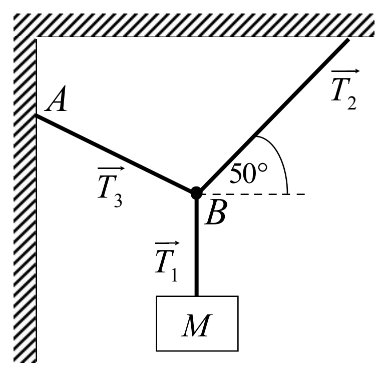
El peso de un cuerpo en la Tierra es una fuerza que actúa sobre todos los objetos que tienen masa acelerándolos hacia la superficie terrestre, cualitativamente corresponde al producto entre la masa y la aceleración de gravedad

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Su acción es responsable que los cuerpos aceleren, por ejemplo: en una caída libre, en un lanzamiento vertical, etc.

El peso no es una propiedad natural de los cuerpos, si no que depende de la posición, puesto que "g" varía inversamente con el cuadrado de la distancia del objeto al centro de la Tierra. Para cuerpos que se encuentran en las inmediaciones de la superficie terrestre, "g" se considera constante e igual a 9,81[m/s^2]. Así, por ejemplo el peso de un objeto en la luna es menor que en la tierra, ya que la aceleración de gravedad en la luna es menor $\left(g_{Luna} = 1{,}6\left[m/s^2\right]\right)$, pero la masa del objeto es la misma tanto en la Tierra como en la Luna (o cualquier otro planeta)

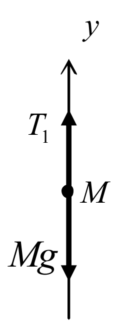
Ejemplo 4.2 Un objeto de masa M=5,0[kg], cuelga como se muestra en la figura. La cuerda AB mide 0,90[m] y la distancia entre la pared de la izquierda y el nudo B es 0,60[m]. Determine la magnitud de las tensiones $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ y $\vec{T_3}$



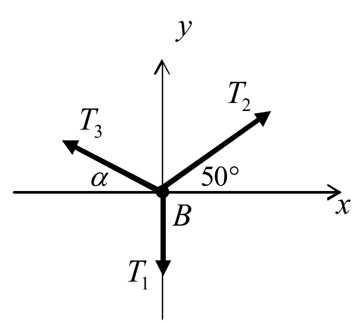
<u>Solución</u>

Siempre es conveniente para este tipo de situaciones problemáticas comenzar realizando un diagrama de cuerpo libre, para los puntos u objetos de interés. En este caso es necesario centrarse en el estudio dinámico de la masa "M" y la unión "B"

Masa "M"



Unión "B"



Dado que el sistema "cuerdas-objeto" está en reposo, se puede concluir que tanto para la masa "M" como para la unión "B" ocurre que $a_x = a_y = 0$

Utilizando los diagramas de cuerpo libre, se pueden escribir la segunda ley de Newton, en término de sus compontes para la masa "M", como

$$\sum F_x = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = T_1 - Mg = 0 \qquad (2)$$

y para la unión "B"

$$\sum F_x = T_2 \cos 50° - T_3 \cos \alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\sum F_y = T_2 \,\text{sen}\, 50° + T_3 \,\text{sen}\, \alpha - T_1 = 0 \qquad (4)$$

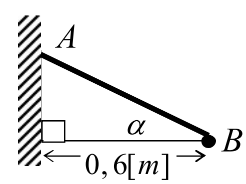
De la relación (2) se encuentra

$$T_1 = Mg$$

$$T_1 = 49[N]$$

Para determinar T_2 y T_3, se debe encontrar primero el valor de $\cos\alpha$ y de $\text{sen}\,\alpha$. Para ello se sabe que la cuerda AB mide 0,90[m], que la distancia entre la pared de la izquierda y la unión "B" es 0,60[m], y que estos dos últimas forman un triángulo rectángulo. Entonces,

$$\cos \alpha = \frac{0,60}{0,90} = 0,67$$



$$\text{sen}\, \alpha = \frac{\sqrt{0,90^2 - 0,60^2}}{0,90} = 0,75$$

Así las relaciones (3) y (4) se transforman en

$$0,64 \cdot T_2 - 0,67 \cdot T_3 = 0$$

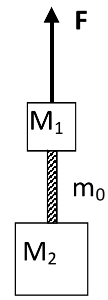
$$0,77 \cdot T_2 + 0,75 \cdot T_3 = 49$$

Finalmente resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$T_2 = 33[N]$$

$$T_3 = 31[N]$$

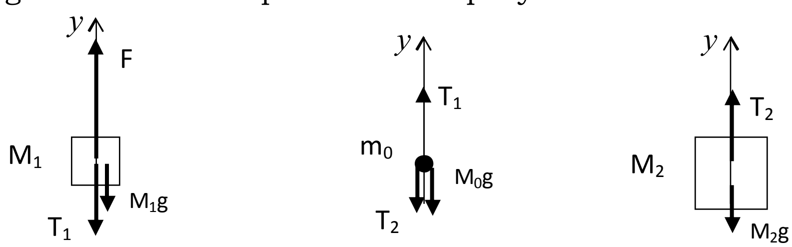
Ejemplo 4.3 Los dos bloques de la figura, de masas M_1 y M_2, están unidos por un cable de masa m_0. Se aplica una fuerza vertical **F** hacia arriba sobre el bloque M_1, de modo que el sistema formado por M_1, M_2 y la cuerda, sube con aceleración constante.



a) Determine la aceleración del sistema en función de las masas y de la fuerza aplicada.
b) Calcule la tensión en las partes superior e inferior de la cuerda que une los bloques.
c) Demuestre que, si la masa de la cuerda que une los bloques es despreciable, las tensiones en los extremos superior e inferior de esa cuerda son iguales.

Solución

a) Los diagramas de fuerza para cada bloque y la cuerda son



La aceleración de cada bloque y del cable $a=a_y$ es la misma puesto que este último es inextensible.

Los diagramas de cuerpo libre muestran que todas las fuerzas son verticales, de modo que la aplicación de la segunda ley de Newton a cada uno de los tres objetos de interés conduce a otras tres expresiones escalares en la dirección de la ordenada, ($\sum F_y=ma_y$)

Las ecuaciones escalares para cada masa son:

Para M_1 : $F - M_1 g - T_1 = M_1 a$

Para m_0 : $T_1 - m_0 g - T_2 = m_0 a$

Para M_2 : $T_2 - M_2 g = M_2 a$

Al sumar miembro a miembro las tres ecuaciones, se obtiene

$$F - (M_1 + M_2 + m_0)\, g = (M_1 + M_2 + m_0)a$$

Al despejar "a":

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2 + m_0} - g$$

b) De la tercera ecuación se obtiene la tensión T_2 en la parte inferior de la cuerda

$$T_2 = M_2(a+g)$$

$$T_2 = \frac{M_2 \cdot F}{M_1 + M_2 + m_0}$$

De la segunda ecuación y del valor de T_2 se obtiene la tensión T_1 en la parte superior de la cuerda:

$$T_1 = m_0 (a + g) + T_2 = (m_0 + M_2) (a + g)$$

$$T_1 = \frac{(m_0 + M_2)\cdot F}{M_1 + M_2 + m_0}$$

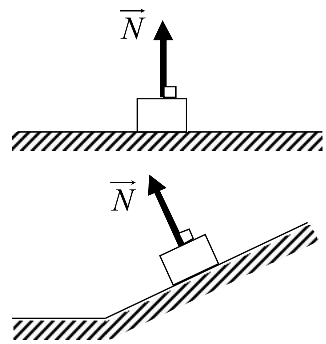
c) Si m_0 es despreciable, es decir se considera que $m_0 \approx 0$, entonces

$$T_2 \approx \frac{M_2 \cdot F}{M_1 + M_2} \qquad \text{y} \qquad T_1 \approx \frac{M_2 F}{M_1 + M_2}$$

Por lo tanto,

$$T_1 = T_2$$

4.6 Fuerza normal $\left(\vec{N}\right)$



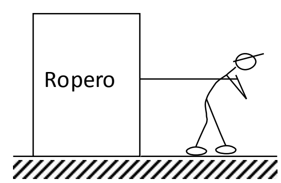
Cuando un objeto en reposo o en movimiento es sostenido por un plano ya sea horizontal o inclinado, el plano ejerce sobre el objeto una fuerza perpendicular a la superficie del plano, llamada "fuerza normal". Esta situación es análoga a que una persona sostenga este objeto sobre una mano: la mano está ejerciendo una fuerza normal sobre el material y así se evita, por ejemplo, que el objeto caiga al suelo.

4.7 Fuerza de roce o fricción [1]

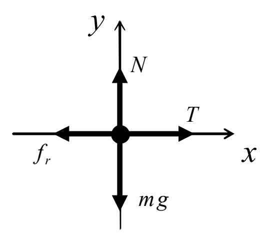
Una fuerza de roce es una fuerza paralela o tangencial a superficies en contacto y que tiende a oponerse al movimiento relativo entre ellos. Su presencia es fundamental en muchas acciones de nuestra vida, como por ejemplo: sostener un vaso, caminar, transmisión de movimiento mediante poleas y bandas trasportadoras en la industria, frenos en automóviles, etc. Pero también presenta inconvenientes pues es la responsable del desgaste de piezas móviles y un mayor consumo de energía. En primera aproximación ocurre por las porosidades microscópicas de las superficies en contacto.

Una buena aproximación para determinar la fuerza de roce es suponer que ésta es directamente proporcional a la fuerza normal, siendo la constante de proporcionalidad el coeficiente de roce (μ). Así

$$f_R = \mu N$$

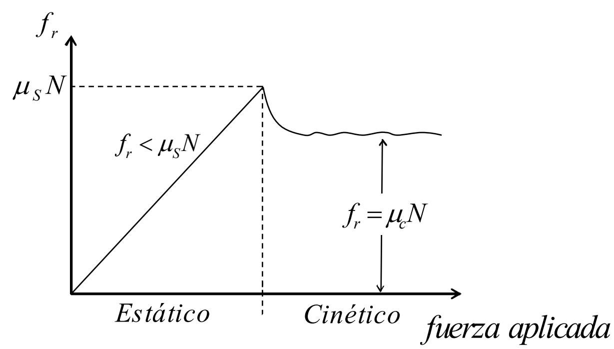


Imagine que un hombre desea mover un gran ropero que se encuentra en reposo, como se muestra en la figura, al comenzar a tirar horizontalmente de él, las fuerzas que actúan sobre el ropero son: el peso, la normal, la fuerza que ejerce el hombre y la fuerza de roce (contraria a la tendencia al movimiento producto de la fuerza aplicada por el hombre), el diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura inferior. Puesto que el ropero se encuentra en reposo, el peso y la normal se equilibran al igual que lo hacen la fuerza del hombre con la fuerza de roce.



[1] Aquí se está trabajando con el roce debido a superficies de cuerpos sólidos en contacto, ya sea deslicen o no. Cuando un cuerpo se mueve en un medio viscoso, como el aire o el agua, ése experimenta una fricción que se denomina "roce viscoso". Esta fuerza se suele modelar aproximadamente como proporcional a la rapidez con que se mueve el objeto respecto del fluido, como es el caso de un balón de futbol en un "tiro libre"

Para sacarlo del estado de reposo, el hombre debe aplicar una fuerza cada vez mayor y mientras el ropero siga en reposo la fuerza de roce aumentará en la misma cantidad que la fuerza del hombre (ya que se encuentran en equilibrio), esto hasta llegar a punto límite cuando al aumentar ligeramente la fuerza del hombre, el ropero se pone en movimiento acelerado, esto lleva a la idea de que la fuerza de roce disminuyó su magnitud al comenzar el movimiento. Si el hombre redujera la fuerza que aplica igualándola a la fuerza de roce, el ropero se moverá con un movimiento rectilíneo uniforme. Un gráfico de fuerza de roce v/s la fuerza aplicada se muestran en la figura adjunta, donde se muestran los resultados de la situación anteriormente planteada.



Las ideas anteriormente comentadas hacen pensar en la existencia de dos tipos de fuerza de roce, una estática y otra dinámica. Se define operacionalmente al

4.7.1 Coeficiente de fricción estática o de roce estático (μ_S) como

$$\mu_S = \frac{f_r}{N}$$

donde f_R es la fuerza necesaria para que el objeto esté a punto de moverse (el movimiento es inminente). En caso contrario,

$$f_r < \mu_S N$$

Análogamente, se define operacionalmente al

4.7.2 Coeficiente de fricción cinética o de roce dinámico (μ_C)

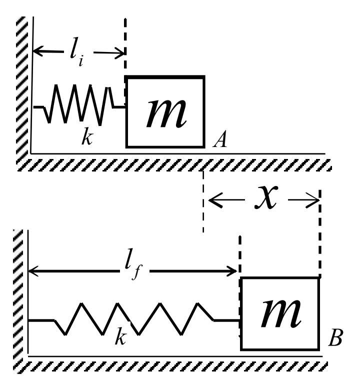
$$\mu_c = \frac{f_r}{N}$$

En este caso f_R corresponde a la fuerza de roce una vez que el objeto se encuentra en movimiento.

4.8 Fuerza elástica y resortes

Un resorte ideal es un objeto que puede deformarse (comprimirse o alargarse) y volver a su forma original. La fuerza de restitución, que ejerce el resorte cuando vuelve a su forma original, está dada por la ley de Hooke, la cual establece que

$$F_{el_x} = -kx$$

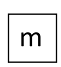
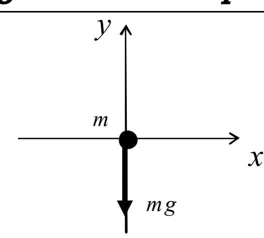
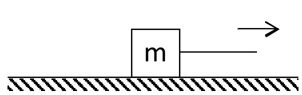
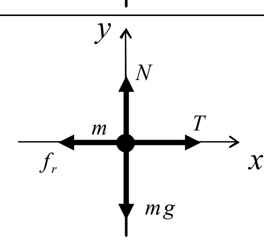
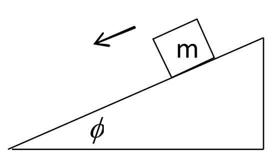
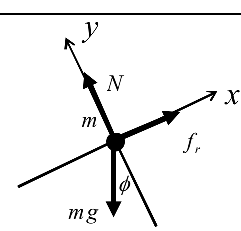


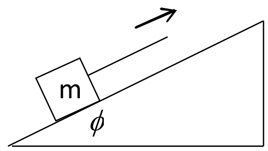
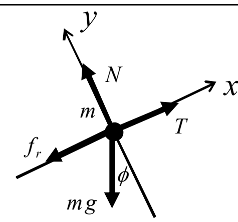
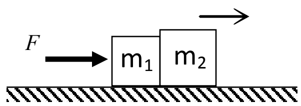
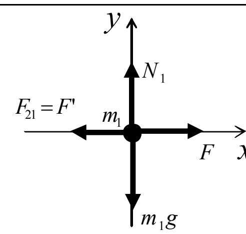
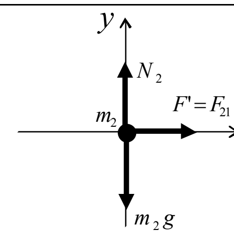
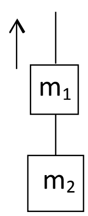
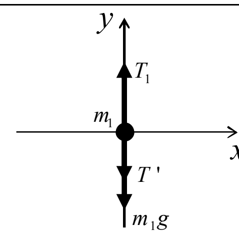
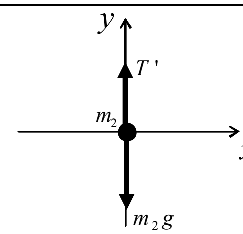
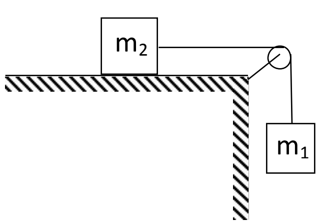
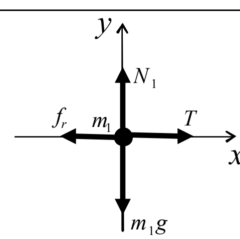
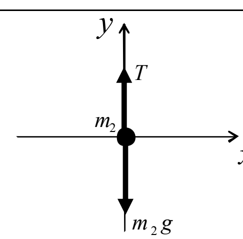
donde x es la deformación del resorte y está dado por $x = l_f - l_i$, con l_i igual a la longitud natural del resorte (cuando no está comprimido o alargado) y l_f es la longitud del resorte comprimido o estirado; k es la constante de fuerza del resorte(siempre mayor que cero).

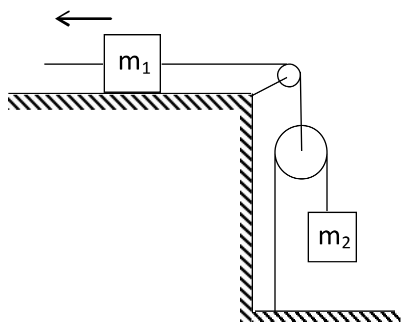
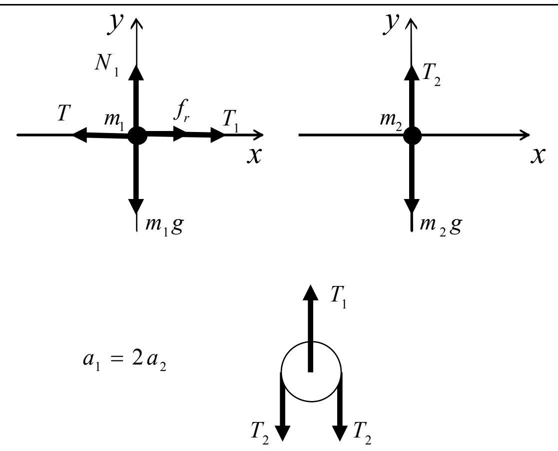
Tabla 2 Listado de las fuerzas recurrentes en este material y sus correspondientes expresiones.

Fuerza	***Características***	***Expresión (magnitud)***
Peso	- Actúa sobre todos los objetos. - Acelerándolos hacia la superficie terrestre (centro de la tierra)	$P = mg$
Tensión	- Se ejerce al tirar de un cuerpo con una cuerda	Se determinan a partir del diagrama de cuerpo libre.
Normal	- Fuerza ejercida por un plano al sostener un cuerpo.	
Roce o fricción	- Es paralela o tangencial a las superficies en contacto - Siempre se opone al movimiento relativo de las superficies en contacto o a la tendencia a moverse de un cuerpo producto de la aplicación de una fuerza sobre él. - Varía para objetos en reposo o en movimiento	$f_r = \mu N$
Elástica	- Proporcional a la deformación del resorte - Tiende a volver a los objetos a su posición natural	$F = kx$

Tabla 3 Ejemplos de situaciones dinámicas y respectivos diagramas de cuerpo libre.

Situación	***Diagrama de cuerpo libre***
1.  Una caja cae libremente	
2.  Una caja es arrastrada mediante una cuerda ideal, sobre una superficie rugosa	
3.  Una caja desciende por un plano inclinado rugoso	

Situación	***Diagrama de cuerpo libre***
4.  Una caja es arrastrada sobre un plano inclinado rugoso por la acción de una cuerda ideal	
5.  Dos cajas en contactos son empujadas por acción de una fuerza $\vec{F}$ y deslizan sobre una superficie rugosa	
6.  Dos cajas unidas por una cuerda ideal son levantadas verticalmente cuando una cuerda atada a la primera caja es tirada hacia arriba	
7.  Dos cajas están unidas por una cuerda: una resbala sobre una superficie horizontal y rugosa y, la otra desciende verticalmente. La cuerda y la polea son ideales	

Situación	***Diagrama de cuerpo libre***
8.  La caja "1" es arrastrada sobre una superficie horizontal y rugosa, mediante una cuerda unida a ella y, mediante otra cuerda levanta una polea que a la vez hace subir a la caja "2". Las cuerdas y las poleas son ideales	

Ejemplo 4.4 Se tienen dos bloques m_1 y m_2 conectados mediante una cuerda ideal sobre un carro de masa M, el que se mueve con velocidad constante de 10,0[m/s] sobre una superficie plana como se muestra en la figura. Entre el bloque de masa m_1 y el plano, el coeficiente de roce cinético es μ_c=0,40.

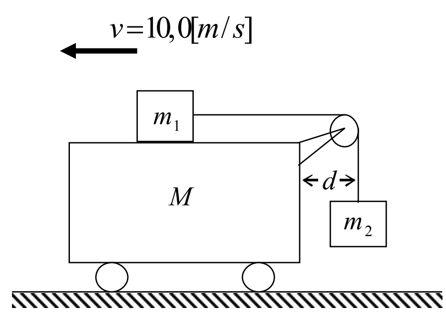
a) Si la polea se encuentra a una distancia d del carro, ¿a qué distancia medida respecto de la mesa llegará el bloque m_2?

Determine:

b) La aceleración de cada bloque.

c) La tensión en la cuerda.

d) La distancia que recorre el bloque M_2 en 2s, si parte del reposo



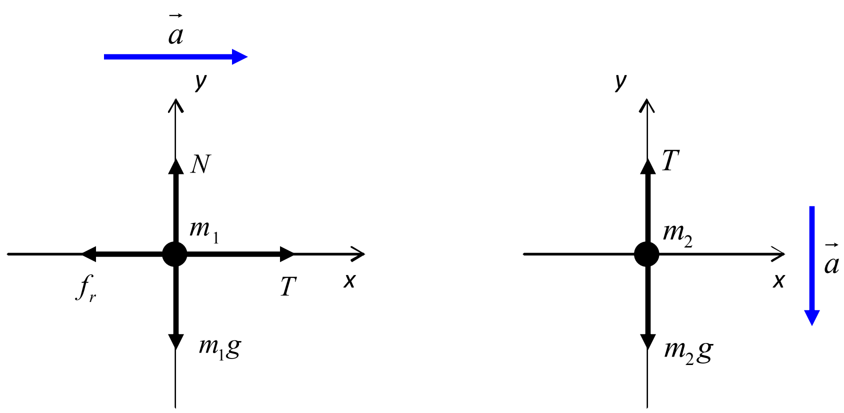
$m_1 = 20{,}0[kg]$ $\quad$ $M = 50{,}0[kg]$

$m_2 = 10{,}0[kg]$ $\quad$ $d = 10{,}0[cm]$

Solución

a) Puesto que el carro se mueve a velocidad constante el, éste se comporta como un marco de referencia inercial, por lo cual "las leyes de la física son las mismas" que si el carro estuviera en reposo, por ejemplo.

Entonces se puede afirmar que la masa m_2 caerá verticalmente hacia abajo respecto del carro a la misma distancia "d" b)



En la figura se muestran respectivos diagramas de cuerpo libre para m_1 y m_2. Además ya que los las masas están unidas por una cuerda ideal, su la magnitud de sus aceleraciones es la misma, luego al escribir las relaciones lineales para la segunda ley de Newton, para ambas masas, se tiene para cada masa

m_1:

$$\sum F_x : \quad T - F_r = M_1 \cdot a \tag{1}$$

$$\sum F_y : \quad N - M_1 g = 0 \text{ , (se encuentra en equilibrio en el eje "y"} \tag{2}$$

M_2:

$$\sum F_y : \quad M_2 g - T = M_2 a \tag{3}$$

Además:

$$F_r = \mu_c N$$

de la ecuación (2), se obtiene:

$$N = M_1 g$$

al reemplazar N en la ecuación (1):

$$\sum F_x = T - \mu M_1 g = M_1 \cdot a \tag{4}$$

Al sumar miembro a miembro (1) más (4)

$$M_2 \cdot g - \mu \cdot M_1 \cdot g = M_2 \cdot a + M_1 \cdot a$$

$$a = \frac{(M_2 - \mu \cdot M_1) \cdot g}{M_2 + M_1}$$

$$a = \frac{(10{,}0 - 0{,}40 \cdot 20{,}0) \cdot 9{,}81}{10{,}0 + 20{,}0}$$

$$a = 0{,}65 \left[m / s^2 \right]$$

c) De la relación (3)

$$T = M_2 g - M_2 a = 10{,}0 \cdot 9{,}81 - 10{,}0 \cdot 0{,}65$$

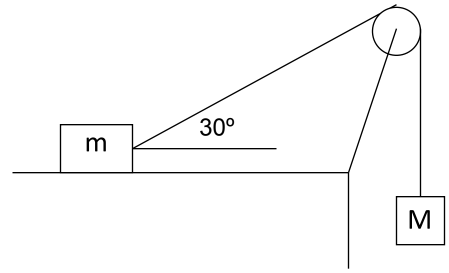
$$T = 91{,}6 [N]$$

d) Al ser la aceleración constante

$$y = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}65 \cdot 2^2$$

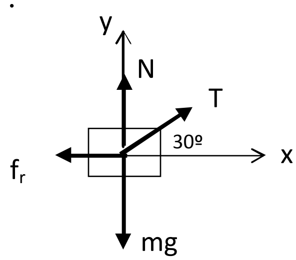
$$y = 1{,}30 [m]$$

Ejemplo 4.5 Una caja, de masa m = 60,0 [kg], colocada sobre una superficie horizontal rugosa, está unida a una pesa de masa M por medio de una cuerda ligera (ideal) que pasa por una polea, como muestra la figura. En cierto instante, la cuerda forma un ángulo de 30° con la horizontal y ejerce sobre la caja una fuerza T = 400[N]. El coeficiente de roce cinético entre "m" y la superficie horizontal es μ_c = 0,50. Para el instante ilustrado en la figura,

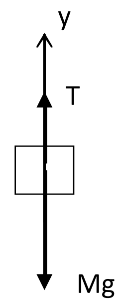


a) Haga un diagrama de cuerpo libre o de fuerzas para cada masa.
b) Calcule la aceleración de cada masa.
c) Determine la masa M del cuerpo que cuelga.

a) Masa m :



Masa M :



b) Como la cuerda es ideal, se puede aseverar que la magnitud de la aceleración con que se desplaza horizontalmente la caja es igual a la magnitud de la aceleración con que desciende la pesa. Luego las ecuaciones para m son

Eje x: $T\cos 30^o - f_r = ma$ (1)
Eje y : $T\text{sen}30^o + N - mg = 0$ (2)

Además $f_r = \mu N$

Al despejar N de la ecuación (2) y reemplazar su igual en la ecuación (1)

$$T\cos 30^o - \mu(mg - T\text{sen}30^o) = ma$$

Al evaluar esta última relación, se halla

$$a = 2{,}44\ [m/s^2]$$

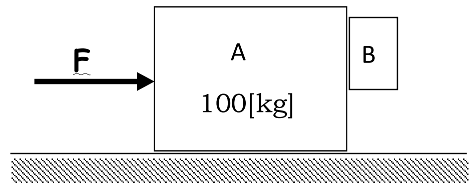
c) Ecuación para M :

$$Mg - T = Ma$$

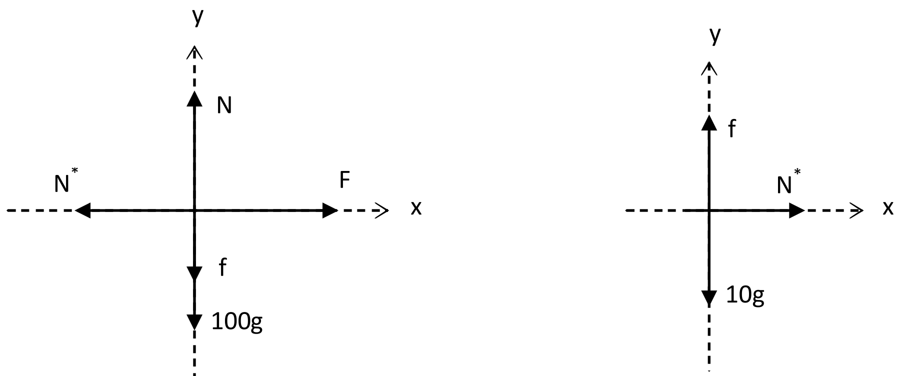
Al aislar M :

$$M = T\ /\ (\ g - a\ )$$
$$M = \ 52{,}9[kg]$$

Ejemplo 4.6 Determine la magnitud de la fuerza **F** horizontal, aplicada sobre el cuerpo A, para que el bloque B de masa igual a 10 [kg] no caiga. El coeficiente de roce estático entre A y B es 0,55 y la superficie horizontal carece de roce.



Solución



Cuerpo A Cuerpo B

La figura superior muestra los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos A y B. Observe que dado que el cuerpo B tiene tendencia a resbalar hacia abajo, entonces la fuerza de roce f que actúa sobre él apunta hacia arriba. A su vez, por la Tercera Ley de Newton, la fuerza de roce que ejerce B sobre A obra verticalmente hacia abajo. Además, N* es la fuerza que empuja a B hacia adelante y es ejercida por A, de tal modo que por la Tercera Ley de Newton la fuerza de apoyo que ejerce B sobre A es igualmente horizontal y apunta en el sentido –x .
Al aplicar la Segunda Ley de Newton a cada cuerpo, se tiene, respectivamente:

ΣF_x : $F - N^* = 100a$ (1) $N^* = 10a$ (3)

ΣF_y : $N - f - 100g = 0$ (2) $f = 10g = \mu_s N^*$ (4)

De (1) y de (3), al despejar "a" e igualar, se obtiene

$$\frac{F - N^*}{100} = \frac{N^*}{10}$$

$$F = 11 \cdot N^* \qquad (5)$$

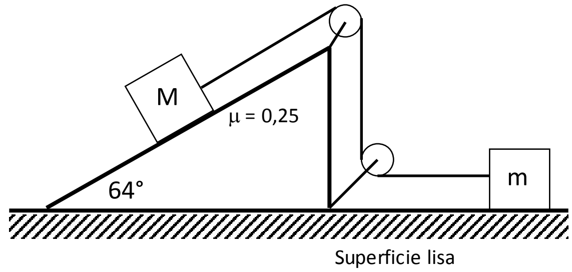
De (4) $$N^* = \frac{10 \cdot g}{\mu_S} \qquad (6)$$

Al reemplazar (5) en (6) y evaluar la expresión resultante,

$$F = \frac{110 \cdot 10}{0,55}$$

$$F = 2000\ [N] = 2,0\ [kN]$$

Ejemplo 4.7 Un cajón (M = 3,0 kg), que desliza sobre un plano inclinado y rugoso, arrastra a otro cajón (m = 2,0 kg) que desliza sobre una superficie horizontal y lisa. Ambos objetos están unidos por una cuerda ideal, la que pasa por dos poleas fijas, tal como se ilustra en la figura adjunta.



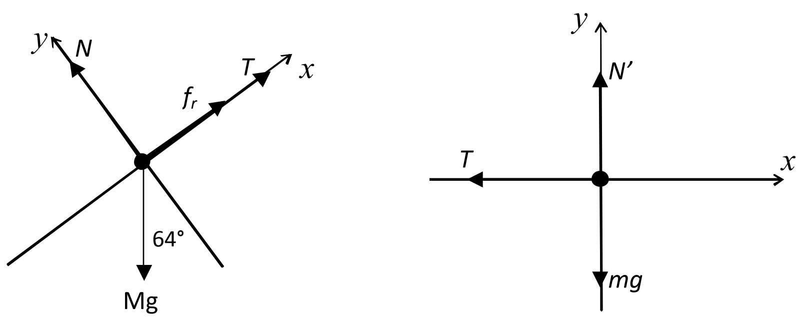
a) Haga el diagrama de cuerpo libre de cada cajón.

b) Determine la aceleración de los cajones

c) Determine la tensión que experimenta la cuerda.

Solución

a)



b) La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada cajón, los que están afectados de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: el de masa mayor desciende por un plano inclinado rugoso y el otro resbala sobre una superficie horizontal lisa

Para el cajón que resbala sobre el plano inclinado se tiene:

$$Mg \cdot \operatorname{sen} 64° - T - f = Ma \quad (1) \qquad N - Mg \cdot \cos 64° = 0 \quad (2) \qquad f_R = \mu N \quad (3)$$

Para el otro cajón se tiene

$$T = ma \quad (4)$$

Al sumar miembro a miembro (1) más (4), se encuentra

$$Mg \cdot \operatorname{sen} 64° - f = (M + m)a$$

Al tener presente (3) y (2), se halla

$$Mg \cdot \operatorname{sen} 64° - \mu Mg \cdot \cos 64° = (M + m)a$$

$$a = \frac{Mg \cdot (\operatorname{sen} 64° - \mu \cdot \cos 64°)}{(M + m)}$$

$$a = \frac{3,0 \cdot 10 \cdot (\operatorname{sen} 64° - 0,25 \cdot \cos 64°)}{(3,0 + 2,0)}$$

$$a = 4,7 \left[m / s^2 \right]$$

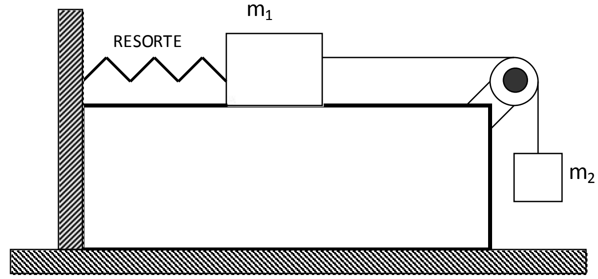
c)

$$T = ma$$

$$T = 2,0 \cdot 4,7$$

$$T = 9,4 [N] \mathrm{N}$$

Ejemplo 4.8 Un bloque, de masa m_1 = 0,100 [kg], se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal y lisa. Sobre él actúa un resorte de constante elástica k = 5,0 [N/m] y una cuerda ideal. Esta cuerda pasa por una polea ideal y de su extremo libre cuelga un cuerpo de masa m_2 = 0,050 [kg].



Determine:

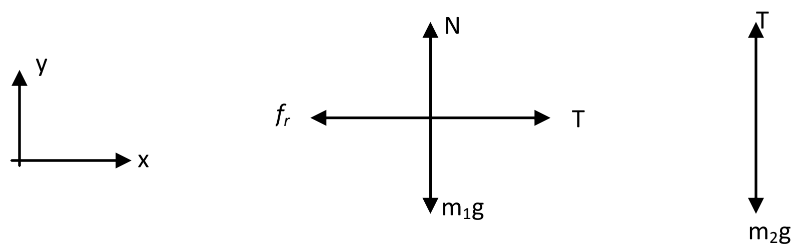
a) La magnitud de la fuerza que ejerce el resorte sobre el bloque.

b) La longitud que se encuentra estirado el resorte.

c) La aceleración que adquiere el cuerpo de masa m_1, en el instante que se corta la cuerda.

Solución

Los diagramas de cuerpo libre para los bloques de masas m_1 y m_2 se muestran en la figura adjunta.



a) En situación estática, se tiene para el primer bloque

$T - f_r = 0$

Y para el segundo bloque

$T - m_2 g = 0$

O sea,

$f_r = m_2 g$

$f_r = 0{,}5 \ [N]$

b) Para el resorte se cumple

$f_r = k\,\Delta x$

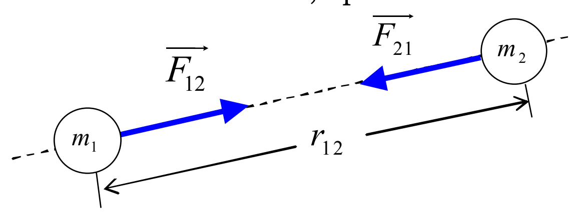
$$\Delta x = \frac{f_r}{k}$$

$$\Delta x = \frac{0{,}5}{5}$$

$\Delta x = 0{,}10 \ [m] = 10 \ [cm]$

4.9 Gravitación

Dos masas siempre se atraen, siendo probablemente el caso más común el de la Tierra atrayendo a cualquier objeto con masa, que se encuentra en sus inmediaciones. Por ejemplo, la Tierra atrae la Luna, el Sol a cada uno de los planetas del sistema solar, etc. La ley de gravitación universal de Newton, que se refiere a partículas dotadas con masa, estable que una partícula atrae a otra con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.



La magnitud de la fuerza gravitacional se expresa como

$$\left|\overrightarrow{F_{12}}\right| = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}$$

donde $G = 6,67 \times 10^{-11}\left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right]$ y se denomina constante de gravitación universal

La tercera ley de Newton permite escribir que

$$\left|\overrightarrow{F_{12}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{21}}\right|$$

Y la dirección de estas fuerzas corresponde a la recta que une ambas partículas y el sentido se determina considerando que siempre se atraen. Además se puede anotar que

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{12}}$$

Ejemplo 4.9 Suponga que la Tierra puede considerarse como una esfera perfecta, de radio 6370[km] y masa $5,97 \times 10^{24}$[kg] Entonces una masa *"m"* ubicada en la superficie terrestre "sentirá" una fuerza

$$F = \frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m}{R_{Tierra}^2}$$

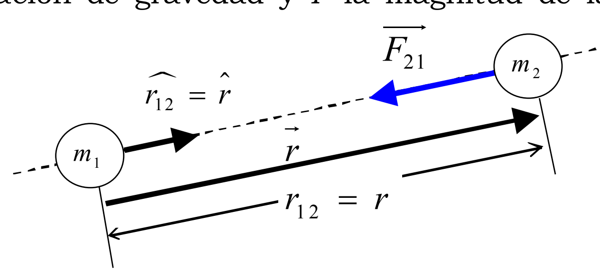
$$F = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,97 \times 10^{24} \cdot m}{\left(6370 \times 10^3\right)^2}$$

$$F = 9,81 \cdot m$$

siendo 9,81 = g, la magnitud de la aceleración de gravedad y *F* la magnitud de la fuerza peso (de un cuerpo en la tierra).

La fuerza gravitacional que ejerce la partícula "1" sobre la "2" puede escribirse vectorialmente de la siguiente manera

$$\overrightarrow{F_{21}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}\widehat{r_{12}}$$



donde el signo "-" indica que la partícula "2" es atraída por la "1"

Otra forma de expresar la fuerza gravitacional $\overrightarrow{F_{21}}$ es

$$\overrightarrow{F_{21}} = m_2 \overrightarrow{g_1}$$

En este caso $\overrightarrow{g_1}$ representa el campo gravitacional generado por la partícula "1". Por tanto,

$$\overrightarrow{g_1} = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{r}$$

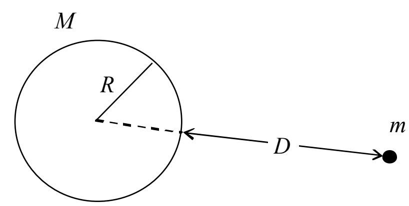
Así el campo gravitacional de la tierra está dado por

$$\overrightarrow{g_T} = -\frac{Gm_T}{r^2}\hat{r}$$

y permite hallar este campo en cada punto del espacio que está a una distancia "r" del centro de la Tierra. Anteriormente, se vio que $\left|\overrightarrow{g_T}\right| = g = 9,81\left[m/s^2\right]$ en la superficie de la tierra.

Puede demostrarse que la interacción gravitacional entre dos cuerpos esféricos y homogéneos (es decir, la fuerza que ejerce un cuerpo esférico homogéneo sobre otro igualmente esférico y homogéneo depende de la distancia entre sus centros. Ello significa que cada uno de esas esferas puede considerarse como una partícula de masa igual a la de ese cuerpo ubicada en el centro de la misma.

Ejemplo 4.10 Una partícula de masa m está a una distancia D de la superficie de una esfera homogénea de masa M y radio R, la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce el cuerpo sobre la partícula es



$$F = \frac{GMm}{(R+D)^2}$$

Ejemplo 4.11 Hallar la magnitud de la aceleración de gravedad en la superficie de Júpiter, si su radio es 11 veces el de la Tierra y su masa es 318 veces la masa de la tierra.

<u>Solución</u>

La aceleración de gravedad en la superficie de la tierra está dada por

$$g_T = \frac{Gm_T}{R_T^2} \approx 9,8\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Análogamente para Júpiter

$$g_J = \frac{Gm_J}{R_J^2}$$

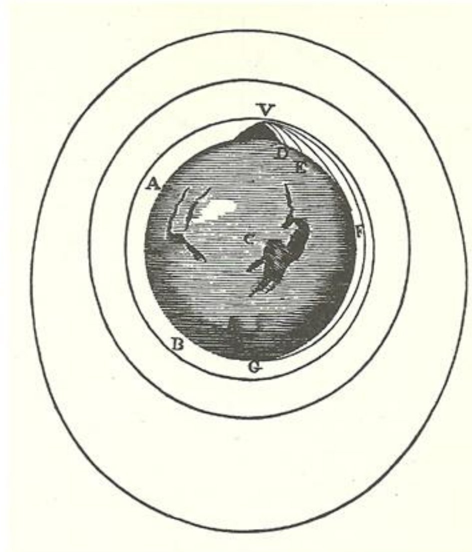
$$g_J = \frac{G\cdot 318 m_T}{(11\cdot R_T)^2}$$

$$g_J = \frac{318\cdot Gm_T}{121\cdot R_T^2}$$

$$g_J = \frac{318}{121}\cdot 9,8$$

$$g_J = 26\left[m/s^2\right]$$

Ejemplo 4.12 Si un proyectil se lanza horizontalmente a una altura suficiente para que no choque con ningún objeto alto y el roce del aire sea despreciable y con una rapidez que permita que el objeto no caiga al piso, tal como muestra la figura de la obra de Newton "Principios matemáticos de la filosofía natural" (1686), esto hará que el proyectil orbite la Tierra. Determine cuál es la rapidez v con que debe viajar el satélite y el periodo T que tendrá, si el satélite viaja a 400[km] de altura en una trayectoria circular.



Solución

La aceleración de gravedad a esa altura es

$$g = \frac{Gm_T}{\left(R_T + 400 \cdot 10^3\right)^2}$$

$$g = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,97 \times 10^{24}}{\left(6370 \times 10^3 + 400 \times 10^3\right)^2}$$

$$g = 8,11 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Puesto que el satélite se mueve en una trayectoria circular, la magnitud de la aceleración es

$$a = g = \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{Rg}$$

$$v = 7,41 \left[\frac{km}{s}\right]$$

El periodo se puede hallar, considerando que la distancia que recorre el satélite es 2pR con una rapidez v constante, de este modo

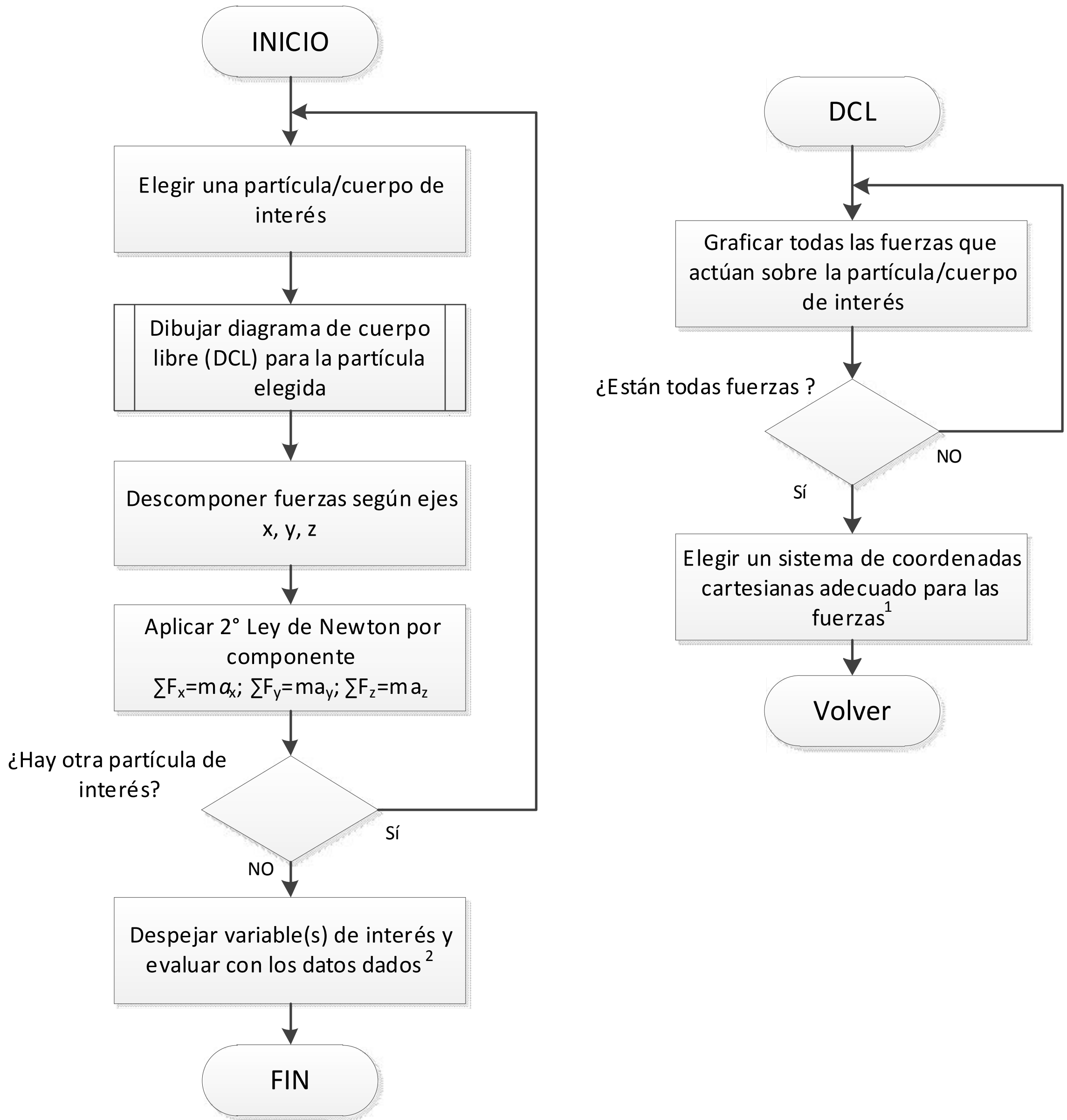
$$2\pi R = vT$$

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$T = 5,74 \times 10^3 [s]$$

Cálculos similares a estos son necesarios para poner en órbita un satélite artificial y fueron realizados por primera vez por Newton en siglo XVII. El primer satélite artificial fue lanzado por el hombre en el año 1957.

4.10 Diagrama de flujo para problemas de dinámica



[1] Procurar que uno de los semiejes coincida con el movimiento o tendencia al movimiento de la partícula/cuerpo de interés.

[2] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

4.11 Ejercicios Propuestos

01) Una fuerza determinada aplicada a una masa m_1 le imprime una aceleración de 20 [m/s^2]. La misma fuerza aplicada a otra masa m_2 le da una aceleración de 30 [m/s^2]. Se unen las dos masas y se aplica la misma fuerza a la combinación de ambas. Hallar la aceleración resultante.

R.: 12 [m/s^2]

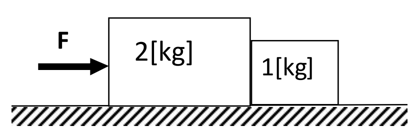
02) Para arrastrar un tronco de 100 [kg] sobre el suelo con velocidad constante, se le empuja horizontalmente con una fuerza de 300 [N]. a) ¿Cuál es la fuerza resistente que ejerce el suelo? b) ¿Qué fuerza debemos ejercer si se desea dar al tronco una aceleración de 2,0 [m/s^2]?

R.: a) 300 N ; b) 500 N

03) Una joven de 60 [kg] se pesa situándose sobre una balanza dentro de un ascensor. ¿Cuál será la lectura de la escala cuando a) el ascensor está descendiendo con una velocidad constante de 3 [m/s]; b) el ascensor está subiendo con una aceleración de 1,2 [m/s^2]; c) el ascensor está bajando con una aceleración de 1,2 [m/s^2]?
(Tome g = 10 [m/s^2])

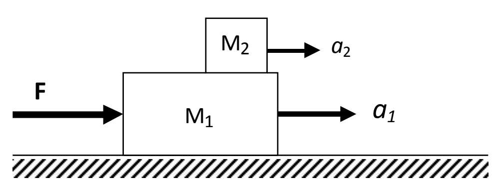
R.: a) 600 [N]; b) 672 [N]; c) 528 [N]

04) Dos masas, una de 2,0 [kg] y otra de 1,0 [kg], están juntas sobre una superficie horizontal lisa. Se ejerce una fuerza horizontal de 5,0 [N] sobre la masa de 2,0 [kg]. a) ¿Cuál es la aceleración del sistema? b) Cuál es la aceleración de la masa de 1,0 [kg]? c) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre ella? ¿Cómo se genera esta fuerza? d) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la masa de 2,0 [kg]?



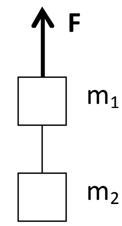
R.: a) 5/3 [m/s^2]; b) 5/3 [m/s^2]; c) 5/3 [N]; d) 10/3 [N]

05) Una masa M_1 = 100 [kg] se empuja a lo largo de una superficie horizontal lisa mediante una fuerza horizontal **F** de modo que su aceleración es a_1 = 6,0[m/s^2]. Otra masa M_2 =20[kg] se desliza sobre la anterior con una aceleración a_2 =4,0 [m/s^2] . (Por lo tanto desliza hacia atrás respecto a M_1). a) ¿Qué fuerza de rozamiento ejerce la masa M_1 sobre M_2? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza **F** aplicada? c) Una vez que M_2 se cae, ¿cuál es la aceleración que adquiere M_1? d) ¿Cómo varían sus respuestas si M_2 no deslizara sobre M_1, de modo que ambas aceleran con 6,0 [m/s^2]?



R.: a) 80 [N]; b) 680 [N]; c) 6,8 [m/s^2]; d) 120 [N]; 720[N]; M_2 no se cae

06) Dos masas iguales, de 0,8 [kg] cada una, están unidas entre sí por una cuerda ideal. Las masas son elevadas verticalmente con velocidad constante mediante una fuerza **F** aplicada a la masa superior. a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada masa. b) Determine la magnitud de la fuerza **F** aplicada y la tensión en la cuerda que une las masas de modo que el sistema suba con velocidad constante. c) Si la tensión máxima que puede soportar la cuerda que une las masas sin romperse es de 12 [N], determine la máxima fuerza que podría aplicarse a m_1 de modo que el sistema sea elevado verticalmente. d) ¿Con qué aceleración sube el sistema en este último caso?

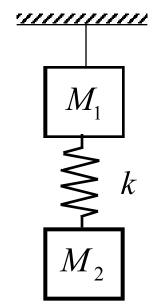


R.: b) F = 16 [N]; T = 8 [N]; c) 24 [N]; d) 5 [m/s^2]

07) Un muchacho arrastra su trineo de 60 [N] a una rapidez constante, subiendo una colina que tiene una pendiente de 15°. Tira del trineo con una fuerza de 25 [N], paralelamente a la superficie de la colina. a) Determine el coeficiente de roce cinético entre el trineo y la superficie. b) En la cima de la colina el muchacho se sube al trineo y se desliza hacia abajo. ¿Con qué aceleración baja por la pendiente?

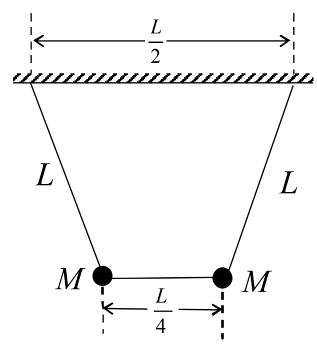
R.: a) 0,16; b) 1,0 [m/s^2]

08) La figura ilustra a dos cuerpos que están suspendidos, uno de una cuerda ideal y el otro de un resorte ideal de constante k. Determine la tensión en la cuerda y el estiramiento del resorte.



R.: $(M_1 + M_2)g$; $\dfrac{M_2 g}{k}$

09) Dos esferas idénticas, de masa M, están colgadas mediante cuerdas ideales de longitud L, de dos puntos separados L/2. Si las dos esferas están unidas por una cuerda de longitud L/4, determine la tensión en cada una de las tres cuerdas.

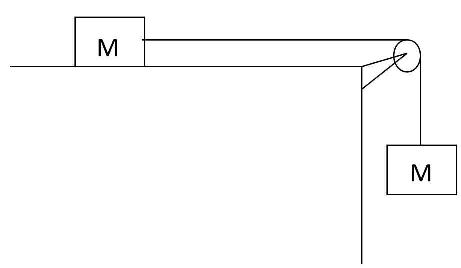


R.: 98,4[N]; 98,4[N]; 12,3[N]

10) Dos masas de 5,0 [kg] están conectadas por una cuerda ligera, como indica la figura.

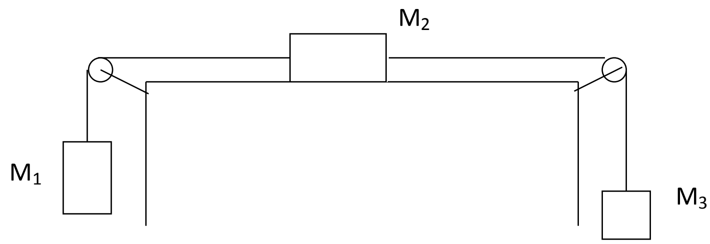
a) Determine la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda si la mesa es suave y la cuerda pasa por una polea sin rozamiento.

b) Determine la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda si la mesa es rugosa y el coeficiente de roce cinético es 0,2



R.: a) 5 [m/s^2] ; 25 [N] ; b) 4 [m/s^2] ; 30 [N]

11) En la figura se muestran tres masas conectadas entre sí por cuerdas ligeras. La masa del centro desliza sobre una mesa, siendo el coeficiente de fricción entre ambas igual a 0,35. Las poleas son de masa despreciable y sin fricción. Los valores de las masas son M_1 = 4,0 [kg], M_2 = 1,0 [kg] y M_3 = 2,0 [kg]. Determinar: a) la aceleración de cada bloque y sus direcciones, b) las tensiones en las cuerdas.

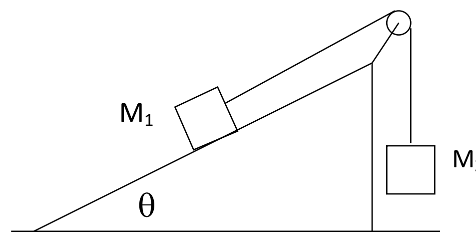


R.: a) 2,36 [m/s²] hacia abajo; 2,36 [m/s²] hacia la izquierda; 2,36 [m/s²] hacia arriba; b) 30,6 [N] y 24,7 [N]

12) Sobre un objeto de 4,0 [kg] actúan dos fuerzas, $\vec{F_1} = \left(2\hat{i} - 3\hat{j}\right)[N]$ y $\vec{F_2} = \left(4\hat{i} + 11\hat{j}\right)[N]$. El objeto está en reposo en el origen en el instante t = 0. a) ¿Cuál es la aceleración del objeto? b) ¿Cuál es su velocidad en el instante t = 3 [s]? C) ¿Cuál es el vector posición del objeto en ese instante?

R.: a) $\left(1,5\hat{i} + 2\hat{j}\right)\left[m/s^2\right]$; b) $\left(4,5\hat{i} + 6\hat{j}\right)[m/s]$; c) $\left(6,75\hat{i} + 9\hat{j}\right)[m]$

13) Se tienen dos bloques conectados como se muestra en la figura. El plano inclinado forma un ángulo θ = 37° con la horizontal. Entre el bloque de masa M_1 = 15 kg y el plano, el coeficiente de roce estático es 0,4. Determine los valores máximo y mínimo de la masa M_2, de modo que el sistema se mantenga en equilibrio.



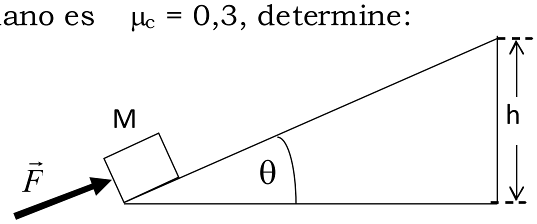
R.: 13,8 [kg] ; 4,2 [kg]

14) Un bloque sube por un plano inclinado en un ángulo θ = 40° con velocidad constante aplicando una fuerza constante F = 15 [N] paralelamente al plano. Si el coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano es μ_c = 0,3, determine:

a) la masa M del bloque,

b) la fuerza neta que actúa sobre el bloque mientras sube con velocidad constante.

c) Encuentre la fuerza mínima (magnitud y dirección) requerida para que el bloque baje con velocidad constante.

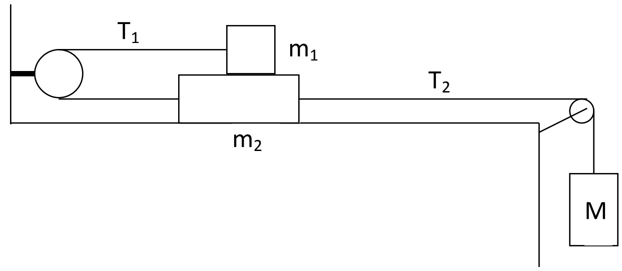


R.: a) 1,7 [kg] ; b) 0 ; c) 7,0 [N]

15) Una camioneta que se mueve horizontalmente a 15,0 [m/s] transporta un cajón. Si el coeficiente de fricción estático entre el cajón y la camioneta es 0,40, encuentre la distancia mínima de frenado de la camioneta de modo que la caja no deslice.

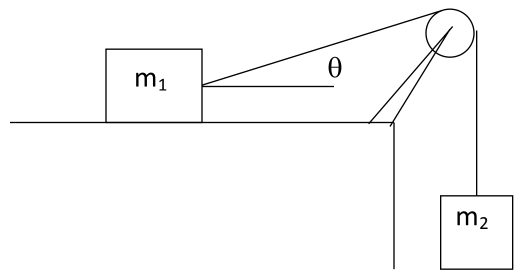
R.: 28,7 [m]

16) El coeficiente de roce cinético entre las masas m_1 y m_2 mostradas en la figura es 0,3. Considere m_1 = 2,0[kg]; m_2 =3,0[kg]; M = 10,0 [kg]. La superficie horizontal y las poleas son sin fricción y todas las masas se liberan desde el reposo. a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada masa. b) Determine la aceleración de cada bloque. c) Halle la tensión en las cuerdas.



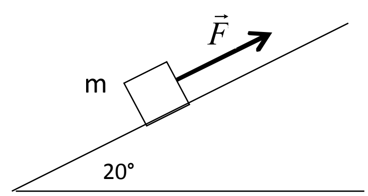
R.:b) 5,9 [m/s²]; c) T_1 = 17,8 [N]; T_2 = 41,0 [N]

17) Se tienen dos masas, m_1 y m_2 , unidas por una cuerda ideal en la forma mostrada en la figura. La cuerda pasa por una polea de masa despreciable. Encuentre el mínimo coeficiente de roce estático entre el bloque "1" y la mesa para que el sistema se encuentre en equilibrio.
Exprese su respuesta en términos de m_1, m_2 y θ.



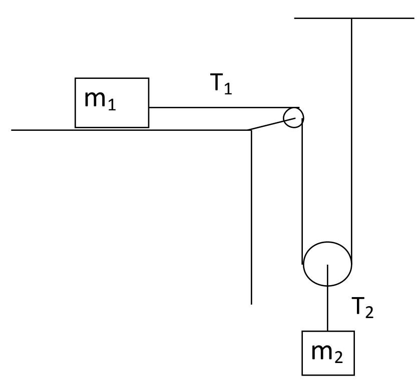
R.: $\dfrac{m_2\cos\theta}{m_1 - m_2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

18) Un bloque de 2,0 [kg] de masa se coloca sobre un plano inclinado en 20° respecto a la horizontal. El coeficiente de roce estático entre el bloque y el plano es μ_e = 0,3 y el coeficiente de roce cinético es μ_c = 0,15. I) Se aplica al bloque una fuerza F de 20 [N], paralelamente al plano y hacia arriba, como se muestra en la figura. a)Haga el diagrama de fuerzas correspondiente. b) Determine la aceleración del bloque y la magnitud de la fuerza de roce.



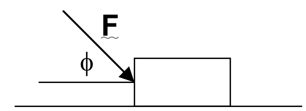
II) Si la fuerza F disminuye a 10 [N], siempre aplicada paralelamente al plano inclinado y hacia arriba, se observa que el bloque no se mueve. Encuentre en este caso la magnitud y dirección de la fuerza de roce.
R.: I b) 5,17 [m/s²]; 2,82[N]; II) 3,16 [N], hacia abajo del plano

19) Considere la configuración mostrada en la figura. Todas las poleas tienen masa despreciable y fricción nula y la masa m_1 se desliza sin fricción. Calcule la aceleración de cada masa y las tensiones en las cuerdas.



R.: $a_1 = \dfrac{m_2 g}{2m_1 + \dfrac{m_2}{2}}$; $a_2 = \dfrac{a_1}{2}$; $T_1 = \dfrac{m_1 m_2 g}{2m_1 + \dfrac{m_2}{2}}$; $T_2 = 2T_1$

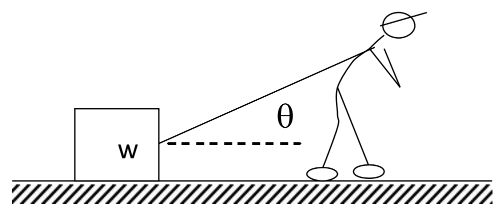
20) Una caja de peso **w** se empuja mediante una fuerza **F** sobre un piso horizontal y rugoso. Demuestre que la magnitud mínima de **F** necesaria para que la caja esté a punto de moverse es



$$F = \frac{\mu \cdot w \cdot \sec\phi}{1-\mu\tan\phi}$$

21) Una gran caja llena de mercadería, cuyo peso es w = 1000 [N], está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa. Un joven trata de arrastrar la caja tirando con una cuerda que forma un ángulo θ = 30° con la horizontal. a) Si el coeficiente de roce estático entre la caja y la superficie es μ_e = 0,5 , determine la fuerza mínima que debe hacer el joven para empezar a moverla. b) ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicar el joven para que la caja no se despegue del suelo? c) Si el joven aplica una fuerza F = 600 [N] y el coeficiente de roce cinético es μ_c = 0,3 , calcule cuánto se demora en arrastrar la caja una distancia d = 20 [m].

R.: a) 448[N] ; b) 2000 [N] ; c) 3,6 [s]



22) Un plano inclinado, que forma un ángulo de 25° con la horizontal, tiene una polea en la parte superior. Un bloque de 30,0 [kg] sobre el plano inclinado está unido por medio de una cuerda ideal que pasa por la polea, a un bloque de 20,0 [kg] que cuelga libremente. Halle la distancia que desciende este último bloque en 2,0 [s], si parte del reposo.

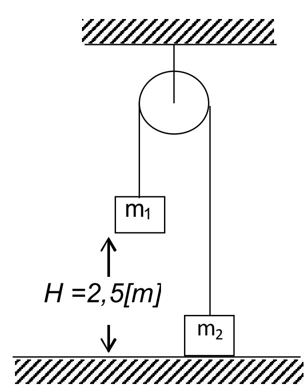
R.: 2,9 [m]

23) a) Un ascensor parte del reposo y sube con aceleración constante. Se mueve 1,0 [m] en los primeros 0,90 [s]. Un pasajero sostiene un maletín de 3,0 [kg] mediante una cuerda ideal. Determine la tensión de la cuerda. b) Considere ahora que el ascensor baja con aceleración constante, de modo que recorre 2,0 [m] en los primeros 1,60[s]. Determine la tensión de la cuerda en este caso y la magnitud de la fuerza que ejerce el piso del ascensor sobre los pies del pasajero, si éste tiene una masa de 75,0 [kg] .

R.: a) 37 [N]; b) 25 [N], 593 [N]

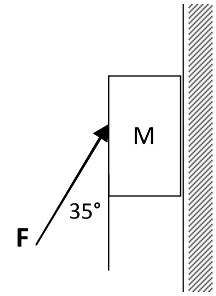
24) Una masa m_1 de 4,5 [kg] está unida a otra masa m_2 de 3,5 [kg] a través de una cuerda ligera que pasa por una polea sin masa y sin roce. Se sujeta la masa m_1, de modo que el sistema está inicialmente en reposo en la posición indicada en la figura. Cuando m_1 se suelta, ésta desciende hasta el suelo, mientras m_2 sube. Determine: a) la aceleración de cada masa y la tensión de la cuerda una vez que el sistema se suelta, y antes de que m_1 llegue al suelo; b) la rapidez de cada masa justo en el momento en que m_1 llega al suelo; c) la altura máxima alcanzada por m_2.

R.: 1,25 [m/s^2]; 39,4 [N]; b) 2,5 [m/s]; c) 2,8 [m]



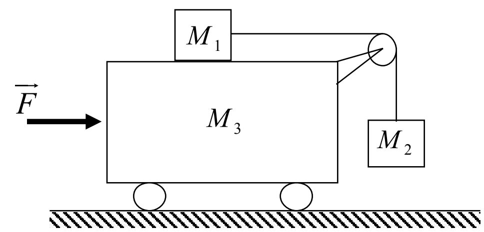
25) Una pieza maciza de metal, de masa M = 250 [g], desliza sobre una pared vertical y rugosa. Sobre ella actúa una fuerza **F** de tal modo que el cuerpo recorre 2,8 [m] en 5,0 [s] con aceleración constante. Determine la magnitud máxima y la magnitud mínima de la fuerza **F**. Considere que el coeficiente de roce cinético entre ambas superficies es 0,4

R.: $F_{máx}$ = 4,2 [N]; $F_{mín}$ = 2,3 [N]



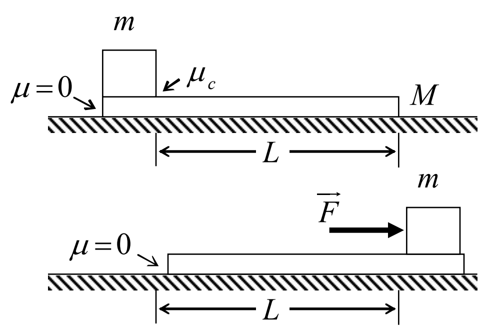
26) Determine la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ que debe aplicarse al carro de la figura adjunta para que los bloques 1 y 2 permanezcan en reposo respecto al carro. Suponga que la polea y la cuerda son ideales y, que todas las superficies en contacto carecen de roce.

R.: $(M_1+M_2+M_3)(M_2g/M_1)$



27) Un bloque de masa m está en reposo sobre el borde izquierdo de un tablón de masa M. El coeficiente roce cinético entre ambas superficies es μ_c. Cuando sobre el bloque se aplica una fuerza horizontal y constante $\vec{F}$, este y el tablón se ponen en movimiento. Determine: a) el tiempo que emplea el bloque en llegar al borde derecho del tablón; b) la distancia recorrida por el bloque respecto de la mesa que sostiene al tablón.

R.: a) 2.13[s]; b) 1.67[m]

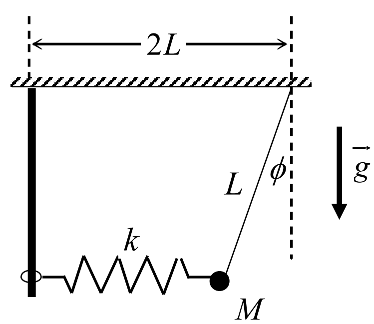


$m = 2,0[kg]$ $\mu_c = 0,30$
$M = 8,0[kg]$ $F = 10[N]$
$L = 3,0[kg]$

28) Una esfera de masa M está colgada de un hilo ideal, de longitud L, y unida a un resorte ideal. El resorte tiene longitud natural L, una constante de fuerza k y puede deslizar sin fricción a lo largo de una varilla vertical. Si la esfera está en reposo en la posición mostrada en la figura, determine el valor del ángulo f que forma el hilo con la vertical.

(Sugerencia: La relación que le permitirá hallar la respuesta no podrá resolverla algebraicamente. Use un método iterativo para encontrar la respuesta de $f(\phi)=0$ de la forma: $\phi_1=g(\phi_0)$.

Otro camino es evaluar en la calculadora distintos valores para f en cada lado de la ecuación y de este acotar para qué angulo se comprueba la igualdad)



$k=200[N/m]$; $L=2,0[m]$
$M=5,0[kg]$; $g=10[m/s^2]$

R.: 55,14° $\left[\tan\phi = \frac{kL}{Mg}(1-\operatorname{sen}\phi)\right]$

29) Determine la altura a la que hay que elevar una manzana sobre la superficie de la Tierra para que su peso disminuya en 1,0%.

Masa de a Tierra: $5,97\times10^{24}$[kg]

Aceleración de gravedad en la superficie de la tierra: 9,81[m/s^2]

Radio de la Tierra: $6,37\times10^{3}$[km]

Constante de gravitación universal: $6,67\times10^{-11}$[Nm^2/kg^2]

R.: 33,2[km]

30) Dos esferas de fierro, cada una de 12[kg], están en contacto. Determine la magnitud de su atracción gravitacional.

Densidad del fiuerro: 7,86[g/cm^3]

R.: $1,9\times10^{-6}$[N]

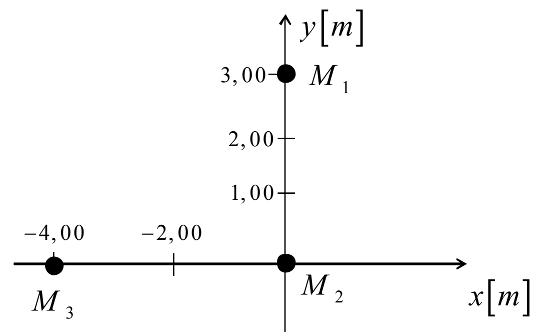
31) Para el sistema de esferas homogéneas de la figura, determine la fuerza gravitacional resultante sobre M_2, ejercida por M_1 y M_3.

M_1=2,00[kg]

M_2=4,00[kg]

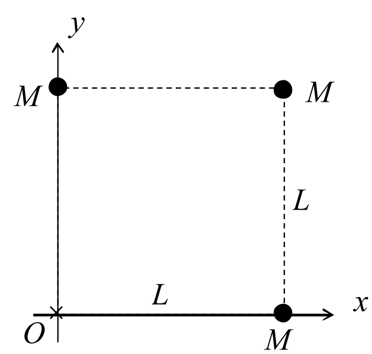
M_3=6,00[kg]

R.: $\left(-100\hat{i}+59,3\hat{j}\right)\times10^{-12}[N]$



32) Tres partículas, cada una de masa M, se colocan en tres vértices de un cuadrado de lado L. Determine el campo gravitacional resultante en el cuarto vértice O debido a esas partículas

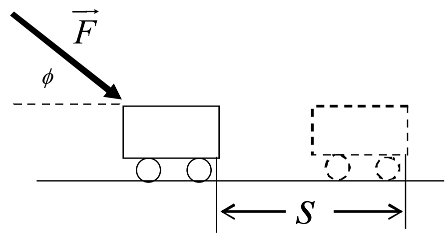
R.: $\vec{g}=\frac{GM}{L^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$



5 Trabajo y Energía

5.1 Trabajo:

Cuando una fuerza $\left(\vec{F}\right)$ cambia la posición $\left(\vec{s}\right)$ de una partícula, se dice que la fuerza ejerce un **trabajo (W)** sobre la partícula. Cuantitativamente, el trabajo se define como el producto punto entre la fuerza aplicada y el desplazamiento experimentado por la partícula, es decir,



$$W = \vec{F} \bullet \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\phi$$

donde ϕ es el ángulo más pequeño que se forma entre ambos vectores, de tal suerte que $0 \leq \phi \leq 180°$.

La unidad de medida del trabajo, en el SI, es el Joule (J), con

$$1[\mathrm{J}] = 1\ [\mathrm{N}] \cdot 1[m]$$

El trabajo puede ser positivo (figura 5.1.a), negativo (figura 5.1.b) o cero (figura 5.1.c), dependiendo de las direcciones de los vectores fuerza y desplazamiento.

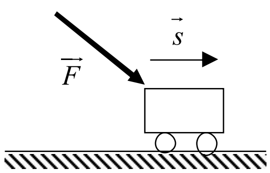


figura 5.1.a

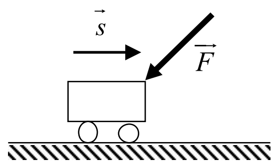


figura 5.1.b

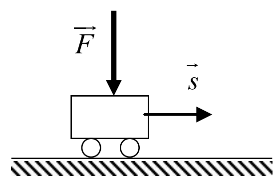


figura 5.1.c

En caso de existir varias fuerzas aplicadas sobre una partícula, el trabajo total se puede determinar calculando el trabajo que realiza cada fuerza por separado y sumar todos los trabajos obtenidos.

$$W = \vec{F_1} \bullet \vec{s_1} + \vec{F_2} \bullet \vec{s_2} + \vec{F_3} \bullet \vec{s_3} + \ldots + \vec{F_n} \bullet \vec{s_n}$$

Otra forma, es determinar la fuerza neta aplicada y con este vector realizar el producto punto con el desplazamiento.

$$W = \left(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots + \vec{F_n}\right) \bullet \vec{s}$$

5.2 Potencia:

La **potencia (P)** corresponde a que tan rápido realiza trabajo una fuerza. Es también una magnitud física escalar y su unidad de medida es el Watt (W). Así se definen, la potencia media $\left(\overline{P}\right)$ y la potencia instantánea (P) de la forma siguiente

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

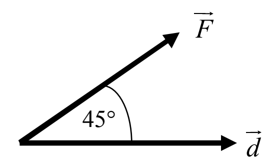
Si la fuerza $\vec{F}$ es constante, entonces la potencia puede expresarse como:

$$P = \frac{d\left(\vec{F} \bullet \vec{s}\right)}{dt} = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Ejemplo 5.1.- Para arrastrar una pieza de granito de 300 [kg] por un terreno horizontal, se emplea una fuerza constante, de magnitud igual a la décima parte de su peso y que forma un ángulo de 45° con la horizontal.
Determine: a) el trabajo realizado por la fuerza constante cuando la pieza se ha arrastrado por 100 [m]; b) la potencia desarrollada por el agente que ejerce la fuerza constante en 11 [min] 37[s].

<u>Solución</u>

a) El trabajo realizado por la fuerza está dado por
$W = Fs\cos\phi$



donde $F = \frac{Mg}{10} = \frac{300 \cdot 9,8}{10} = 294\left[N\right]$

$s = 100\,[m]$

$\varphi = 45°$

Entonces,

$$W = 294 \cdot 100 \cdot \cos 45°$$

$$W = 2,08 \cdot 10^4\left[J\right]$$

b) Como en esta situación la potencia es constante, se tiene que

$$P = \frac{W}{t}$$

donde t = 11 · 60 + 37 = 697 [s]

Luego,

$$P = \frac{2,08 \cdot 10^4}{697} = 29,8\left[W\right]$$

5.3 Trabajo y energía cinética

Una fuerza resultante neta no nula $\left(\vec{F}\right)$ constante actúa sobre una partícula de masa *m*, la que varía su rapidez de v_1 a v_2 mientras se desliza una distancia de magnitud s, entonces

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot s}$$

$$a \cdot s = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$$

Al multiplicar a ambos lados de la relación anterior por la masa, se tiene que el trabajo neto es igual:

$$W_{neto} = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot s = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

donde, $\frac{1}{2}mv^2$ se define como la energía cinética de la partícula. Por tanto el trabajo neto realizado es igual a la variación de la energía cinética de la partícula

$$W_{neto} = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Este resultado de gran importancia en física, se conoce con el nombre de Teorema del trabajo y la energía y es válido incluso para el caso que sobre una partícula actúen fuerzas variables.

Ejemplo 5.2 Una partícula se desplaza del punto O(0;0;0)[m] al punto M(-3;4;16)[m] cuando actúa sobre ella una fuerza resultante $\vec{F} = 7\hat{i} - 6\hat{j}[N]$. Determine: a) el trabajo realizado por la fuerza resultante; b) la potencia media, si el móvil empleó 0,6[s] para ir de O a M; c) el cambio de energía cinética de la partícula; además, d) señale si es necesario especificar la trayectoria seguida por la partícula.

Solución

a) Como la fuerza resultante es constante,

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \bullet \vec{s} = \vec{F} \bullet \left(\overrightarrow{r_M} - \vec{r_0}\right) = \left(7\hat{i} - 6\hat{j}\right) \bullet \left(-3\hat{i} + 4\hat{j} + 16\hat{k}\right)$$

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \bullet \vec{s} = -21 - 24 = -45[J]$$

b) $\overline{P} = \frac{W}{t}$

$$\overline{P} = \frac{-45}{0.6}$$

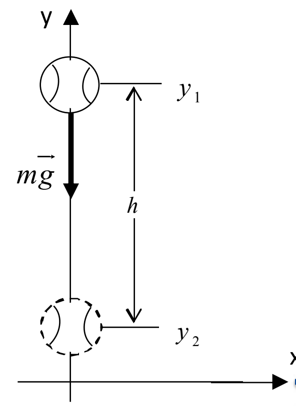
$$\overline{P} = -75[W]$$

c) $W_{neto} = \Delta K$

$$\Delta K = -45[J]$$

d) Es innecesario especificar la trayectoria que sigue la partícula, dado que la fuerza resultante es constante.

5.4 Trabajo de la fuerza peso y energía potencial gravitatoria.



Una pelota (partícula), que se encuentra en reposo en la posición $y=y_1$, se suelta. El trabajo que realiza la fuerza peso $\left(m\vec{g}\right)$, cuando la pelota alcanza la posición $y=y_2$ está dado por

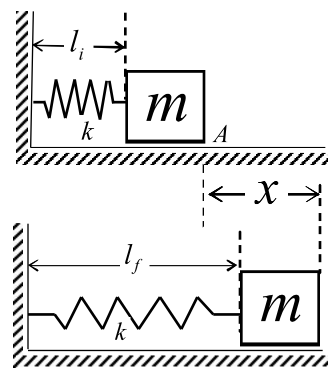
$$W_{mg}=m\vec{g}\bullet\left(y_1-y_2\right)\left(-\hat{j}\right)=mg\left(-\hat{j}\right)\bullet\left(y_1-y_2\right)\left(-\hat{j}\right)$$
$$W_{mg}=mg\left(y_1-y_2\right)\cos 0°=mg\left(y_1-y_2\right)$$
$$W_{mg}=mgy_1-mgy_2$$

Se define mgy como la energía potencial gravitatoria U_g de la pelota, cuando está en la posición "y". Entonces,

$$W_{mg}=U_{g_1}-U_{g_2}=-\left(U_{g_2}-U_{g_1}\right)=-\Delta U_g$$

Puede afirmarse que el trabajo de la fuerza peso es igual a la energía potencial gravitatoria inicial de la partícula menos su energía potencial gravitatoria final.

5.5 Resortes y energía potencial elástica



Para un resorte ideal la fuerza de restitución, que ejerce el resorte está dada por

$$F_{el_x}=-k\cdot x$$

donde

$x=l_f-l_i$;

l_i igual a la longitud natural del resorte;

l_f es la longitud del resorte comprimido o estirado;

k es la constante de fuerza del resorte.

5.5.1 Energía potencial elástica

El trabajo que realiza el resorte sobre la partícula a la que está unido está dado por:

$$W_{el}=\int_{x_1}^{x_2}F_{el_x}\cdot dx=\int_{x_1}^{x_2}-k\cdot x\cdot dx=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

donde, $\frac{1}{2}kx^2$ se define como la energía potencial elástica U_{el} del resorte, ya sea que el resorte se estire ($x>0$) o se contraiga ($x<0$), la energía potencial elástica es siempre positiva. Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza que ejerce el resorte sobre la partícula (ver figura) está dado por

$$W_{el}=U_{el_1}-U_{el_2}=-\Delta U_{el}$$

Puede afirmarse que el trabajo de la fuerza del resorte ideal es igual a la energía potencial elástica inicial menos su energía potencial elástica final.

Para una partícula cualquiera sobre la que actúan la fuerza de peso, la fuerza de un resorte y otras fuerzas no conservativas (W_{otras}), se tiene que el trabajo neto es:

$$W_{neto} = W_{mg} + W_{el} + W_{otras} = K_B - K_A$$

$$-\Delta U_g - \Delta U_{el} + W_{otras} = K_B - K_A$$

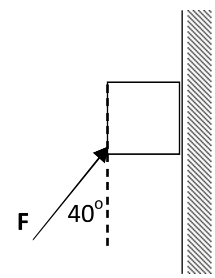
$$U_{g_A} - U_{g_B} + U_{el_A} - U_{el_B} + W_{otras} = K_B - K_A$$

$$K_A + U_{g_A} + U_{el_A} + W_{otras} = K_B + U_{g_B} + U_{el_B}$$

Este resultado indica que si no existen otras fuerzas (W_{otras} = *0*) la energía en el punto "A" es igual a la energía en el punto "B", o sea la energía mecánica se conserva, independientemente del camino recorrido por la partícula sobre la que actuaron esas fuerzas. Este principio es fundamental y se debe tener presente en muchas situaciones físicas y se denomina principio de conservación de la energía mecánica €
De hecho la suma "$K+U$" recibe el nombre de **energía mecánica** (E), de modo que:

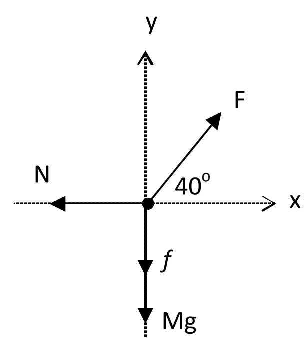
$$E = K + U$$

Ejemplo 5.3 Un bloque de 5,0 [kg] desliza hacia arriba sobre un muro vertical por la acción de una fuerza inclinada **F**. El bloque parte del reposo y cuando ha recorrido una distancia de 1,8 [m], su rapidez es 0,6 [m/s]. El trabajo realizado por la fuerza **F** es 121,5[J] y el coeficiente de roce cinético entre el bloque y el muro es 0,30. Haga un diagrama de fuerzas para el bloque y determine:



a) El trabajo realizado por el peso del bloque.
b) El trabajo realizado por la fuerza normal.
c) El trabajo realizado por la fuerza de roce.
d) La magnitud de la fuerza de roce.

Solución
a) El diagrama de fuerzas para el bloque está indicado en la figura adjunta. El desplazamiento es de la forma **d** = d$\hat{j}$. Entonces,



$$W_{Mg} = M \cdot g \cdot d \cdot \cos 180° = 5{,}0 \cdot 10 \cdot 1{,}8 \cdot (-1) = -90\left[J\right]$$

b) $W_N = N \cdot d \cdot \cos 90° = 0\left[J\right]$

c) $W_{neto} = W_N + W_{Mg} + W_F + W_{roce} = K_f - K_i$, donde $K_i = 0$
es decir,

$$-90 + 121{,}5 + W_{roce} = \frac{5{,}0 \cdot 0{,}6^2}{2}$$

$$W_{roce} = f \cdot d \cdot \cos 180° = -30{,}6\left[J\right]$$

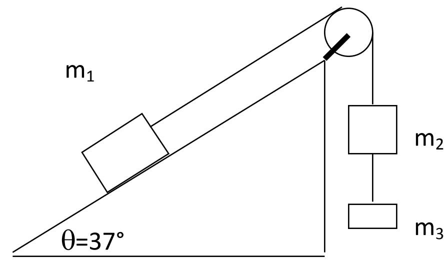
d) Como $W_{roce} = F_r d \cdot \cos 180^o = -30{,}6J$

Entonces $f = \dfrac{30{,}6}{1{,}8}$

$$f = 17\left[N\right]$$

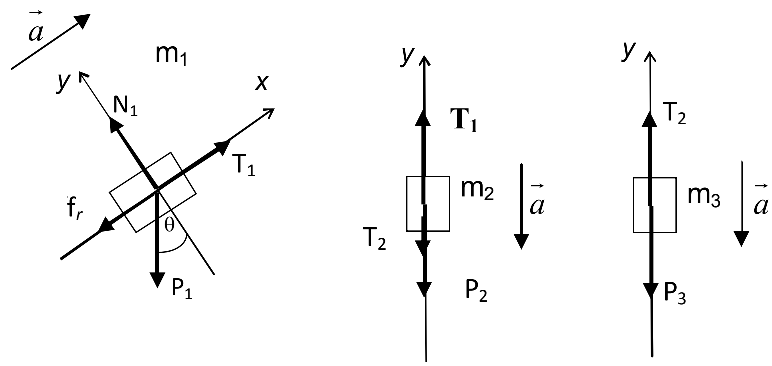
Ejemplo 5.4 Los bloques, de masas m_1 = 3,0 [kg], m_2 = 2,0 [kg] y m_3 = 1,0 [kg] están unidos por cuerdas ideales, según muestra la figura. La masa m_1 sube por el plano inclinado rugoso, siendo el coeficiente de roce cinético entre m_1 y la superficie μ_c = 0,2.

a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada bloque.
b) Calcule la aceleración de la masa m_2,
c) Determine las tensiones en las dos cuerdas.
d) Si el sistema parte del reposo, determine su energía cinética en el instante en que las masas m_2 y m_3 han bajado 0,6 m.



Solución

a) La figura adjunta muestra los diagramas de fuerzas para los bloques de masas m_1, m_2 y m_3, respectivamente.



b) Al hacer la sumatoria de las componentes escalares de las fuerzas y teniendo presente que la magnitud de la aceleración es la misma para los tres bloques, se puede escribir lo siguiente:

Para m_1 $\quad T_1 - f - m_1 g \,\text{sen}\theta = m_1 a$ (eje x) (1)

$\quad N_1 - m_1 g \cos\theta = 0$ (eje y) (2)

Para m_2 $\quad T_2 + m_2 g - T_1 = m_2 a$ (3)

Para m_3 : $\quad m_3 g - T_2 = m_3 a$ (4)

Al sumar miembro a miembro las expresiones para (1), (3) y (4), se obtiene:

$$(m_2 + m_3)g - f - m_1 g \,\text{sen}\theta = (m_1 + m_2 + m_3)a \qquad (5)$$

Como $f = \mu_c N_1 = \mu_c m_1 g \cos\theta$

y al reemplazar f por su igual en la relación (5) , se obtiene para la aceleración a:

$$a = \frac{m_2 + m_3 - m_1(sen\theta + \mu\cos\theta)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

de modo que

$$a = 1{,}2 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

c) De la ecuación (4) se encuentra que

$$T_2 = m_3(g - a)$$

$$T_2 = 8{,}8\ [N]$$

A partir de la ecuación (3) se halla que

$$T_1 = T_2 + m_2(g - a)$$

$$T_1 = 26{,}4\ [N]$$

d) La rapidez tiene el mismo valor para los tres bloques y como la aceleración de ellos es constante, para los bloques de masas m_2 y m_3 se puede emplear la expresión

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0)$$

$$v = \sqrt{2a\left(y - y_0\right)}$$

con $y - y_0 = 0{,}6[m]$

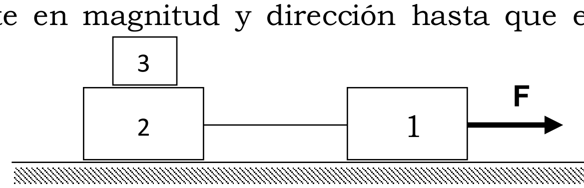
$$v = 1{,}2[m/s]$$

Luego, la energía cinética del sistema es

$$K_{sist} = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + m_2 + m_3)v^2$$

$$K_{sist} = 4{,}32\ [J]$$

Ejemplo 5.5 Dos cajas, 1 y 2, de igual masa M, se encuentran unidas por una cuerda ideal y están en reposo sobre una superficie horizontal y lisa, tal como se ilustra en la figura adjunta. Una tercera caja 3, de masa M, se coloca sobre una de las cajas anteriores. El coeficiente de roce estático entre ambas cajas es μ. Sobre la caja 1 se aplica una fuerza **F** horizontal, constante en magnitud y dirección hasta que el sistema se ha movido una distancia s. Determine el coeficiente de roce estático μ entre las cajas 2 y 3, para que está última acelere junto con las otras dos. Use el teorema del trabajo y la energía.



Solución

El teorema del trabajo y la energía establece que

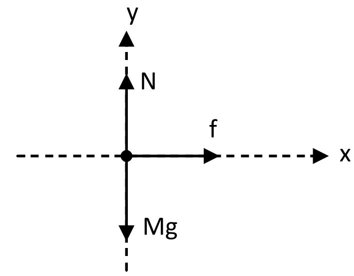
$$W_{neto} = K_{final} - K_{inicial}$$

donde $K_{inicial} = 0$, puesto que inicialmente el sistema está en reposo.

Dado que la tensión de la cuerda que une los bloques 1 y 2 es una fuerza interna del sistema "cajas-cuerda" al igual que la fuerza de roce estática entre 3 y 2, puede considerarse que la fuerza neta **F** actúa sobre una partícula de masa 3M, de tal modo que

$$W_{neto} = W_F = K_{final}$$

$$F \cdot s = \frac{3Mv^2}{2} \qquad (1)$$



El diagrama de fuerzas para la caja 3 permite anotar que N = Mg y que la fuerza de roce f es la fuerza neta que actúa sobre la carga.
Además, como la caja 3 debe acelerar de la misma forma junto con las otras dos, ello significa que debe experimentar el mismo cambio de velocidad, de tal suerte que

$$f \cdot s = \frac{Mv^2}{2}$$

$$\mu \cdot Mg = \frac{Mv^2}{2} \qquad (2)$$

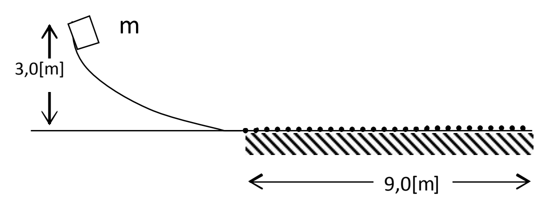
Al despejar v^2 de (1) y reemplazar su igual en (2), se halla que

$$\mu = \frac{F}{3Mg}$$

En realidad el resultado encontrado debiera expresarse como $\mu \geq \frac{F}{3Mg}$, puesto que para la fuerza roce estático se cumple que $f \leq \mu \cdot N$, salvo que se admita que el bloque 3 está "a punto" de moverse respecto del bloque 2.

Ejemplo 5.6 Un bloque de masa 2,0 [kg], inicialmente en reposo desciende desde una altura de 3,0 [m] por una rampa sin roce como se indica en la figura y luego desliza sobre un plano horizontal rugoso hasta detenerse, después de recorrer 9,0 [m]. Determine:

a) La rapidez del bloque cuando llega al punto más bajo de la rampa.
b) El trabajo que realiza la fuerza de roce sobre el bloque
c) El coeficiente de roce entre el plano rugoso y el bloque.



<u>Solución</u>

a) Por conservación de la energía mecánica, la energía en el instante inicial debe ser igual que en el instante cuando el bloque llega al punto más bajo de la rampa.

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3{,}0}$$

$$v = 7{,}7\ [m/s]$$

b) Como el bloque se mueve hasta detenerse, toda la energía inicial se disipa en el trabajo efectuado por la fuerza de roce. Entonces,

$$mgh + W_{roce} = 0$$

$$W_{roce} = -mgh$$

$$\mathrm{W_{roce}} = -2 \cdot 10 \cdot 3{,}0$$

$$\mathrm{W_{roce}} = -60\ [J]$$

c) En el presente caso, el trabajo realizado por la fuerza de roce es

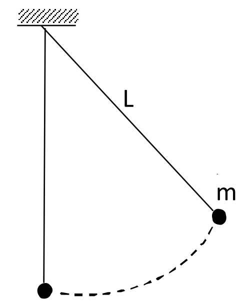
$W_{roce} = f \cdot d \cos 180°$, donde W_{roce} = - 60 [J]

$$W_{roce} = -\mu N d$$

$$W_{roce} = -\mu m g d$$

$$\mu = -\frac{-60}{2,0 \cdot 10 \cdot 9,0}$$

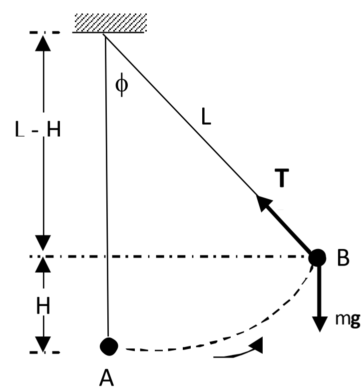
$$\mu = \frac{1}{3} = 0,33$$



Ejemplo 5.7 La figura muestra un péndulo simple, el cual está constituido por una cuerda ideal de 180 [cm] de longitud y por una esfera pequeña de 0,30 [kg] de masa. Cuando el péndulo oscila, se mide que la esfera tiene una rapidez de 4,0 [m/s] cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria. Determine la altura máxima H que alcanza la esferita respecto del punto más bajo de su trayectoria y el ángulo que forma el péndulo con la vertical en este caso.

<u>Solución</u>

Sobre la esferita actúan dos fuerzas: la tensión ejercida por la cuerda y el peso (ejercido por la Tierra). La tensión es siempre perpendicular a la trayectoria de la esferita, de modo que el trabajo realizado por esa fuerza es nulo. En esta situación sólo trabaja el peso y, por tanto, la energía mecánica total se conserva.



Luego,

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

Si se toma el nivel de referencia para la energía potencial de la esferita en el punto A, se tiene que $U_A = 0$ y $U_B = mgH$.

Además, $K_A = \frac{mv_A^2}{2}$ y $K_B = 0$ (v_B = 0 en B, pues aquí la esferita se detiene antes de comenzar a descender hacia A).

Así,

$$mgH = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$H = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{4,0^2}{2 \cdot 9,8}$$

$$H = 0,82\ [m]$$

Al observar la figura, se concluye que

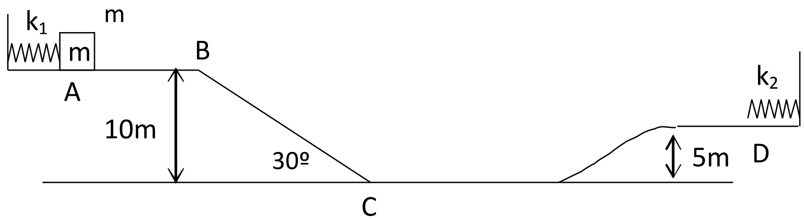
$$\cos\varphi = \frac{L-H}{L}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1,80-0,82}{1,80}\right)$$

$$\varphi = 57,0°$$

Ejemplo 5.8 Un bloque de masa m = 2,0 [kg] se empuja contra un resorte de constante k_1 = 2000 [N/m] comprimiéndolo una distancia x_1 = 60 [cm] (punto A de la figura). El bloque se suelta, bajando luego por un plano inclinado BC que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El bloque pasa por el punto C con una rapidez v_C = 20 [m/s], deteniéndose finalmente en el punto D (ver figura), donde comprime 40 [cm] a un segundo resorte de constante k_2. Si solo hay roce entre los puntos B y C, determine:

a) la rapidez del bloque en el punto B,
b) el trabajo hecho por la fuerza de roce en el tramo BC,
c) la constante k_2 del segundo resorte.



m = 2,0 [kg]	v_C = 20 [m/s]
k_1 = 2000 [N/m]	x_2 = 40 [cm] = 0,4 [m]
x_1 = 60 [cm] = 0,6 [m]	h_2 = 5 [m]
h_1 = 10 [m]	

Solución.

a) $E_A = E_B$

$\frac{1}{2} k_1 x_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} mv_B^2 + mgh_1$

Entonces,

$$v_B = \sqrt{\frac{k_1}{m}}x_1$$

v_B = 19 [m/s]

b) $W_f = E_C - E_B = \frac{1}{2} mv_C^2 - (\frac{1}{2} mv_B^2 + mgh_1)$

Al evaluar esta expresión, se obtiene:

W_f = - 160 [J]

c) $E_C = E_D$

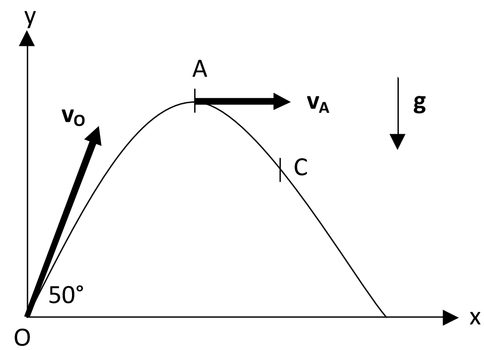
$\frac{1}{2} mv_C^2 = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + mgh_2$

$$k_2 = \frac{m(v_C{}^2 - 2gh_2)}{x_2^2}$$

k_2 = 3750 [N/m]

Ejemplo 5.9 Con enojo, una persona del público lanza un tomate maduro, de 120 gramos a un actor aficionado que se encuentra en el escenario. El tomate sale de la mano de la persona con una velocidad de magnitud 20,0 [m/s] y forma un ángulo de 50° con la horizontal. El tomate da finalmente en la cara del actor. Admitiendo que el punto de lanzamiento del tomate y el punto del impacto de este proyectil están a la misma altura, determine la energía potencial y la energía cinética cuando: a) es lanzado; b) en el punto más elevado de la trayectoria; c) a los 2,0 [s] de haber sido lanzado.

Solución



a) En la figura adjunta se ilustra la trayectoria del tomate, el punto de lanzamiento O, la velocidad inicial, la velocidad en el punto más elevado de la trayectoria A y el punto C por el que pasa el proyectil a los 2,0 [s] de haber sido lanzado. Según el sistema de referencia trazado

$\mathbf{g} = -\ 9{,}8\hat{j}$ [m/s²]

Al tomar como nivel de referencia para la energía potencial al eje x, entonces

$U_O = 0$

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{0{,}120 \cdot 20^2}{2} = 24{,}0[J]$$

En esta situación problemática se conserva la energía mecánica total, pues la única fuerza que trabaja es el peso y ésta es una fuerza conservativa.

b) Cuando el tomate pasa por el punto A de la trayectoria, la velocidad del proyectil sólo tiene componente horizontal, es decir

$$v_A = v_{0,x} = v_0 \cos 50° = 20 \cdot \cos 50° = 12{,}9[m/s]$$

Entonces,

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} = \frac{0{,}120 \cdot 12{,}9^2}{2} = 10{,}0[J]$$

$U_A = 24.0 - 10.0 = 14.0[J]$, pues la energía mecánica total se conserva.

c) Cuando el tomate pasa por el punto C, las componentes de su velocidad son

$v_{C,x} = v_{O,x} = 12{,}9$ [m/s]

$$v_{C,y} = v_{O,y} - gt = v_O \cdot sen50° \, gt = 20 \cdot sen50° - 9{,}8 \cdot 2{,}0 = -4{,}3 \text{ [m/s]}$$

Entonces,

$$v_C = \sqrt{12{,}9^2 + (-4{,}3)^2} = 13{,}6 \text{ [m/s]}$$

y

$$K_C = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{0{,}120 \cdot 13{,}6^2}{2} = 11{,}1[J]$$

$$U_C = 24.0 - 11.1 = 12.9[J]$$

Ejemplo 5.10 Un carro experimental de 10[kg], se mueve bajo la acción de una fuerza neta $\vec{F} = 5t \cdot \hat{i} + \left(3t^2 - 1\right)\hat{j}\left[N\right]$. Considere que el cuerpo está en reposo en t=0 y halle la energía cinética en el instante *t=10*[s]

Solución
De acuerdo a la segunda ley de Newton, cuando la masa del objeto es constante,

$$\overrightarrow{F_{neta}} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\overrightarrow{F_{neta}} \cdot dt = m \cdot d\vec{v}$$

$$d\vec{v} = \frac{1}{m} \cdot \overrightarrow{F_{neta}} \cdot dt$$

$$d\vec{v} = \frac{1}{m} \cdot \left[5t \cdot \hat{i} + \left(3t^2 - 1\right)\hat{j}\right] \cdot dt$$

Al integrar cada miembro, se obtiene

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{m} \cdot \int_0^{10} \left[5t \cdot \hat{i} + \left(3t^2 - 1\right)\hat{j}\right] \cdot dt = \frac{1}{m} \cdot \left[\frac{5}{2}t^2 \cdot \hat{i} + \left(\frac{3t^3}{3} - t\right)\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{m} \cdot \left[2{,}5t^2 \cdot \hat{i} + \left(t^3 - t\right)\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}(10) = \frac{2{,}5 \cdot 10^2}{10} \cdot \hat{i} + \frac{1}{10}\left(10^3 - 10\right)\hat{j}$$

$$\vec{v}(10) = 25 \cdot \hat{i} + 99\hat{j}\left[m/s\right]$$

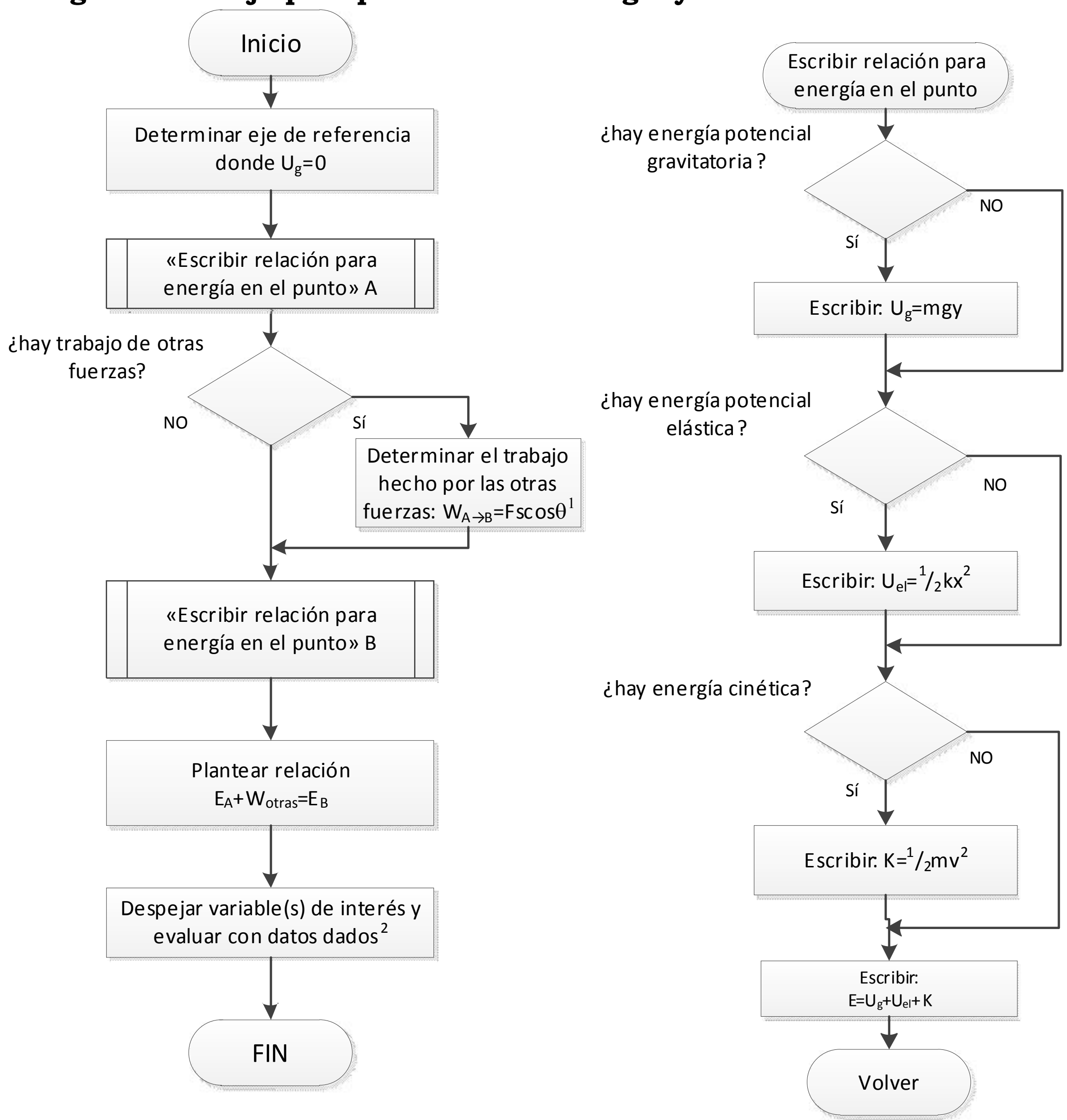
La energía cinética, en *t=10*[s], se obtiene a partir de

$$K(10) = \frac{1}{2}m \cdot \left(v(10)\right)^2$$

$$K(10) = \frac{1}{2}10 \cdot \left(25^2 + 99^2\right)$$

$$K(10) = 5{,}2 \times 10^4\left[J\right]$$

5.6 Diagrama de flujo para problemas de energía y su conservación

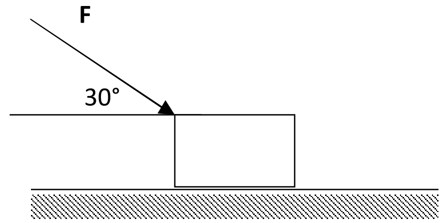


[1] Por lo general, cuando el trabajo hecho por otras fuerzas es nulo, la energía mecánica total E se conserva.

[2] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

5.7 Problemas propuestos

01) Un baúl, de 40 [kg], se mueve con rapidez constante sobre un piso horizontal y rugoso, recorriendo una distancia de 4,0 [m], por la acción de una fuerza **F** inclinada en 30°, tal como indica la figura adjunta. El coeficiente de fricción cinética es 0,40. Determine: a) la magnitud de la fuerza **F**; b) el trabajo efectuado por las fuerza **F**; c) el trabajo efectuado por la fuerza de roce; d) la variación de la energía cinética del baúl.



R.: 235,4 [N] ; 815 [J]; -815 [J]; 0

02) En un martinete, un martillo de acero de 200 [kg] se levanta 3,00 [m] por encima del extremo superior de una viga I que se está clavando en el suelo. El martillo se suelta, introduciendo la viga otros 7,4 [cm] en el suelo. Los rieles que guían el martillo ejercen una fuerza de fricción constante de 60 [N] sobre él. Use el teorema del trabajo y de la energía para determinar: a) la rapidez del martillo justo antes de golpear a la viga; b) La fuerza media que ejerce el martillo sobre la viga.

R.: a) 7,6 [m/s]; b) 79 x 10^3 [N]

03) Por medio de una cuerda se eleva verticalmente una bloque de masa M hasta una altura H, subiéndolo con una aceleración igual a g/4. Encontrar: a) el trabajo hecho por la cuerda sobre el bloque; b) el trabajo realizado por el peso; c) la rapidez con que llega el bloque a la altura H, si inicialmente estaba en reposo.

R.: 5MgH/4; b) – MHg; c) $(gH/2)^{1/2}$

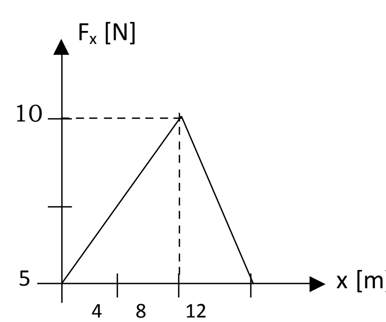
04) Una cuerda ideal levanta 3.0[m] a un saco de 5.0[kg] con una aceleración de 5.0[m/s^2]. Determinar: a) la magnitud de la tensión de la cuerda (T); b) el trabajo realizado por la tensión; c) el trabajo realizado por la fuerza de atracción de la Tierra; d) la energía cinética del objeto después de ser elevado 3,0 [m], si inicialmente estaba en reposo.

R.: a) 74 [N]; b) 222 [J]; c) –147 [J]; d) 75 [J]

05) Un cuerpo de 0,2 [kg] cae libremente desde una altura de 3,0 [m] sobre un montón de arena. Si el cuerpo penetra 3,0 [cm] en la arena antes de detenerse, determine la fuerza media (magnitud) que ejerció la arena sobre él. Resuelva el problema usando: a) el teorema del trabajo y la energía y, b) las leyes de Newton.

R.: aprox. 200 [N]

06) Se aplica una fuerza $\vec{F} = F_x \hat{i}$, a un objeto de 3,0 [kg]. La componente F_x varía con la coordenada x del objeto, tal como se muestra en el gráfico adjunto. Determine: a) El trabajo realizado por la fuerza **F** cuando el objeto se mueve desde x = 0 hasta x = 12 [m]; b) La rapidez del objeto cuando pasa por x = 12 [m], si al pasar por x = 4 [m] su rapidez es 2,0 [m/s].

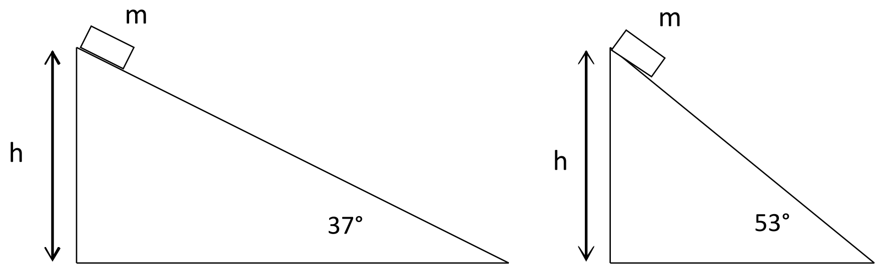


R.: a) 60[J]; b) 6,1[m/s]

07) Una caja de 3,0 [kg] baja por un plano liso e inclinado en 30°, respecto a la horizontal. Parte del reposo desde la parte superior del plano, situada a una altura de 12,0 [m] sobre el suelo. Determine: a) la energía potencial inicial de la caja, considerando el nivel cero de energía potencial en la base del plano; b) la aceleración de la caja; c) su posición y velocidad después de 2,0 [s] de empezar a deslizar; d) la energía potencial, energía cinética y energía total en ese instante; e) la energía cinética total cuando la caja alcanza la parte inferior del plano.

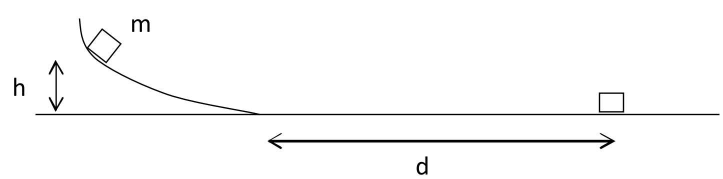
R.: a) 360 [J]; b) 5 [m/s^2]; c) ha bajado 10 [m], medidos sobre el plano; 10 [m/s]; d) 210 [J]; 150 [J]; 360 [J] ; e) 360 [J]

08) Dos bloques idénticos, cada uno de masa m = 0,8 [kg], se colocan sobre sendos planos inclinados en 37° y 53°. Las superficies de ambos planos son suaves y los bloques parten del reposo desde una misma altura h = 1,5 [m]. Calcule y compare: a) el módulo de la aceleración que adquiere cada bloque; b) la rapidez con que llega cada bloque a la base del plano; c) el tiempo que tardan los bloques en llegar a la base del plano; d) el trabajo hecho por la fuerza peso sobre cada bloque en todo el trayecto; e) la energía total con que llegan los bloques a la base del plano.



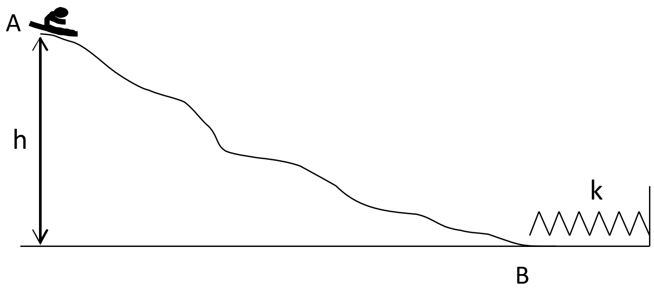
R.: a) a_1 = 6 [m/s^2] ; a_2 = 8 [m/s^2] ; b) $v_1 = v_2$ = 5,48 [m/s] ; c) t_1 = 0,9 [s] ; t_2 = 0,7[s] ; d) $W_1 = W_2$ = 12 [J] ; e) $E_1 = E_2$ = 12 [J]

09) Un bloque de masa m = 2,0 [kg] situado a una altura h= 1,0 [m] sobre el nivel del suelo, desliza por una rampa curva y lisa, partiendo desde el reposo. Alcanza a resbalar una distancia d = 6,0 [m] sobre una superficie horizontal y rugosa antes de llegar al reposo. Determine: a) la rapidez del bloque al llegar a la parte inferior de la rampa; b) el trabajo realizado por la fuerza peso sobre el bloque, hasta que éste se detiene ; c) el trabajo realizado por la fuerza de roce sobre el bloque, hasta que éste se detiene ; d) el coeficiente de roce entre el bloque y la superficie horizontal.



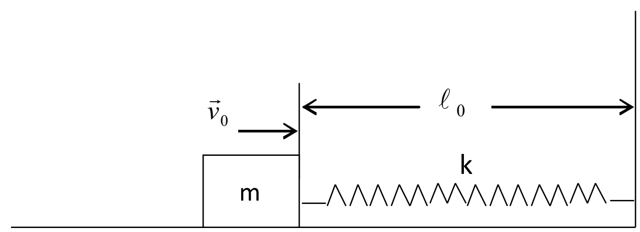
R.: a) 4,47 [m/s] ; b) 20 [J] ; c) –20 [J] ; d) 0,17

10) María y José deslizan por un tobogán, cuya superficie es lisa. Usan para ello un deslizador de masa despreciable. Ambos parten del reposo desde un punto A, que se encuentra a 12,0 m del nivel del suelo. En la base del tobogán hay un gran resorte de constante k = 14400 [N/m], que los detiene en su movimiento. José se tira primero y María lo hace después. Luego, ambos se tiran juntos por el tobogán. a) Si la masa de José es 60 [kg], determine la compresión del resorte producida por él. b) Si María comprime el resorte en 90 [cm], determine la masa de María. c) Calcule la rapidez con que llegan ambos a la base del tobogán (punto B), cuando se tiran juntos. d) Calcule la compresión del resorte producida cuando se tiran juntos.



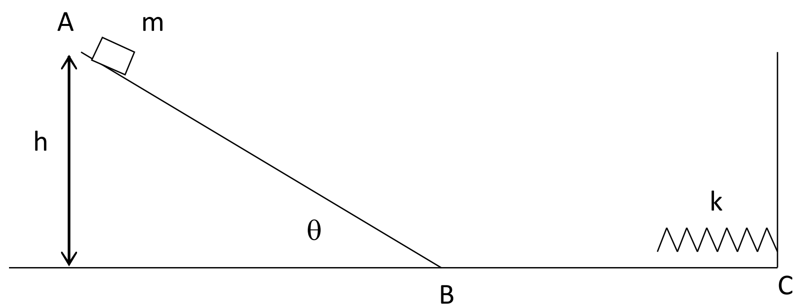
R.: a) 1,0 [m]; b) 48,6 [kg]; c) 15,5 [m/s]; d) 1,35 [m]

11) Un disco de 1,0 [kg] desliza hacia la derecha sobre una superficie horizontal rugosa, con coeficiente de roce μ = 0,25. Cuando el disco tiene una rapidez v_O = 3,0 [m/s] entra en contacto con un resorte de constante k = 50 [N/m]. El disco se detiene después que el resorte se ha comprimido una distancia d, para luego ser impulsado hacia la izquierda. Determine: a) la distancia comprimida d; b) la rapidez v de la masa cuando pasa por la posición no deformada del resorte, hacia la izquierda, y c) la distancia que recorre el disco hasta que vuelva a detenerse.



R.: a) 0,378 [m] ; b) 2,3 [m/s] ; c) 1,08 [m]

12) El bloque de masa m = 1,2 [kg] desliza, partiendo del reposo desde el punto A, por el plano rugoso AB que tiene una inclinación θ = 37°, respecto a la horizontal. El punto A se encuentra a una altura h = 12 [m] del nivel del suelo. El bloque pasa por B con una rapidez v_B = 15 [m/s]. Continúa por el plano horizontal liso, donde un resorte de constante k = 6750 [N/m] lo detiene momentáneamente y lo envía de vuelta hacia arriba del plano. Calcule: a) el trabajo realizado por la fuerza de roce cuando el bloque baja por el plano inclinado AB; b) el coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano inclinado; c) la compresión máxima que experimenta el resorte; d) la altura máxima que alcanza el bloque una vez que se devuelve por el plano inclinado.



R.: a) –9,0 [J] ; b) 0,047 ; c) 0,2 [m] ; d) 10,6 [m]

13) Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 20[kg], con una rapidez inicial de 50[m/s]. Determine: a) los valores iniciales de la energía cinética, potencial y mecánica total; b) la energía cinética y potencial al final del tercer segundo; c) la energía cinética y potencial cuando está a 100[m] de altura; d)la altura a la cual se encuentra el objeto cuando la energía cinética se ha reducido al 80% de su valor inicial

R.: a) 25×10^3[J], 0, 25×10^3[J]; b) $4{,}2\times10^3$[J], $2{,}1\times10^4$[J]; c) $5{,}4\times10^3$[J], $2{,}0\times10^4$[J]; 26[m]

14) Desde un avión que vuela horizontalmente a 100[m] de altura, con una rapidez de 270[km/h], se suelta una caja hermética de 10[kg]. Determine: a) la energía cinética inicial de la caja; b) la energía potencial inicial; c) su energía total; d) la rapidez al llegar al suelo; e) la velocidad al llegar al suelo; f) sus energías cinética y potencial, 10[s] después de haber sido soltada.

R.: a) $2{,}8\times10^4$[J]; b) $9{,}8\times10^3$[J]; c) $3{,}4\times10^4$[J]; d) 87[m/s]; e) $75\hat{i}-44\hat{j}\left[m/s\right]$; f) 0,0.

15) Un tren que parte del reposo viaja 300[m] por una vía descendente, que tiene una pendiente del 1%. Con el "impulso adquirido" sube 60[m], por una vía ascendente con 2% de pendiente hasta que se detiene. Determine la magnitud de la fuerza resistente o de roce que ejerce la vía sobre el tren.

(Sugerencia: Si α y β son los ángulos son los ángulos que forman las vías descendente y ascendente con la horizontal respectivamente, entonces $\text{tg}\alpha\approx\text{sen}\alpha=0{,}01$ y $\text{tg}\beta\approx\text{sen}\beta=0{,}02$, puesto que α y β son "ángulos pequeños", vale decir, menos que 10°)

R.: *w/20*, con *w*=peso del tren

16) Un resorte, con una constante de resorte 2k, se corta por la mitad. Determine la constante del resorte de cada resorte resultante.

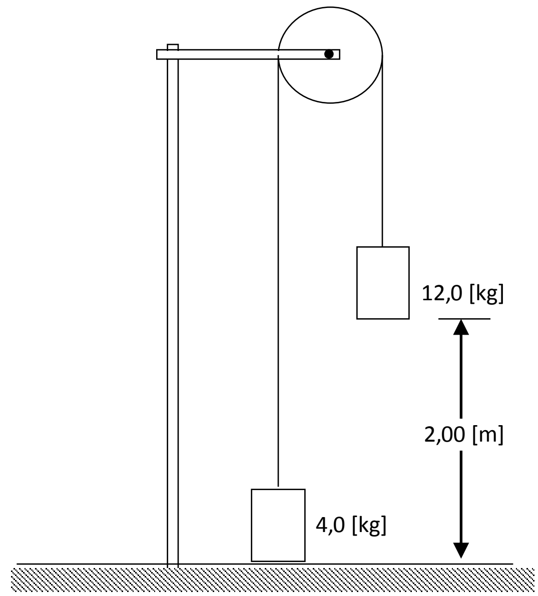
R.: k

17) Un atleta lanza una jabalina de masa m = 0,5 [kg] con una velocidad $\vec{v}_0=(15\hat{i}+20\hat{j})$[m/s]. La jabalina sale de su mano a 2,0 [m] sobre el nivel del suelo. Considere a la jabalina como una partícula y desprecie la resistencia del aire. En tal caso determine: a) la altura máxima, respecto al suelo, alcanzada por la jabalina; b) el trabajo realizado por la fuerza peso sobre la jabalina desde que ésta sale de la mano del atleta hasta que alcanza su altura máxima; c) la energía cinética de la jabalina 4,0 segundos después de ser lanzada.

R.: a) 22 [m]; b) –100[J]; c) 156,2 [J]

18) En la figura, el tarro de pintura de 12,0 [kg] se suelta del reposo cuando está a 2,00 [m] sobre el piso. Use el principio de conservación de la energía para encontrar la rapidez con que el tarro golpea el piso. Ignore la fricción y la masa de la polea.

R.: 4,4 [m/s]



19) Se deja caer una esfera de 80 [g] que está unida al extremo inferior de un resorte vertical no deformado, de constante de fuerza igual a 4,0 [N/m].

a) Encuentre la máxima rapidez que alcanza la esfera.

b) Halle la distancia que desciende antes de quedar momentáneamente en reposo.

R.: a) 4,4[m/s] ;b) 40 [cm]

6 *Momentum Lineal y Colisiones*

6.1 Momentum Lineal:

Cuando un objeto está en movimiento y se quiere detenerlo, la dificultad que se tendrá para realizar esto depende tanto de su masa (mayor masa, mayor "dificultad") como de su velocidad (mayor magnitud de la velocidad, mayor "dificultad"). Puede afirmarse que, el ***momentum lineal (p)*** (o cantidad de movimiento lineal o simplemente momento) es una medida de la "dificultad" para detener el objeto.
Esta es una magnitud física vectorial, que corresponde al producto de la masa por la velocidad y en el SI se mide en [kg·m·s^{-1}]. Por tanto,

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \left[kg \cdot \frac{m}{s} \right]$$

Al derivar el momentum lineal respecto del tiempo,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

y si m es constante, se halla que

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_n \, ,$$

Por consiguiente, una formulación general de la segunda ley de Newton es

$$\vec{F}_n = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Cuando la fuerza neta es constante,

$$\vec{F}_n = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Para un sistema de partículas aisladas, el momentum total corresponde a la suma vectorial de los momento individuales de cada partícula, es decir:

$$\vec{p}_{sistema} \equiv \vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

6.2 Impulso

Cuando una fuerza neta actúa sobre una partícula, ésta puede desplazarse y en este caso se habla del "trabajo que realiza la fuerza neta". Sin embargo, esa fuerza se ejerce durante cierto intervalo de tiempo, de modo que en esta situación se habla del "impulso de la fuerza". Por tanto el impulso $\left(\vec{I}\right)$ de una fuerza constante se define como

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Para una fuerza neta constante, el impulso neto, corresponde a la variación del momentum lineal:

$$\vec{I}_{neto} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta t$$
$$\vec{I}_{neto} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Este resultado es general incluso en el caso que las fuerza neta sea variable, ya que

$$\vec{I}_{neto} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{neta} \cdot dt = \Delta\vec{p}$$

En el SI el impulso se mide en [N·s] = [kg·m·s^{-1}]

6.3 Principio de Conservación del Momentum Lineal

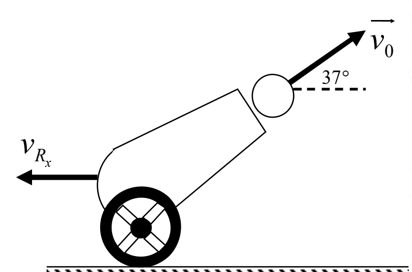
En un sistema de partículas aislado, donde la sumatoria de fuerzas externas es cero y sólo existe interacción entre las partículas del sistema, el momento total es constante. Este es un principio fundamental en Física, de modo que hay que tenerlo presente para resolver diferentes situaciones problemáticas, entre las cuales cabe mencionar las referidas a colisiones.

Ejemplo 6.1 Un cañón FLAK 18 de 88[mm] usado en la segunda guerra mundial de masa M_C=1000 [kg] montado sobre ruedas, de modo que puede retroceder libremente al hacer un disparo. Dispara un proyectil de masa M_p= 9.00 [kg] con una velocidad justo al salir del cañón de v_0=820 [m/s], formando un ángulo de 37.0° por sobre de la horizontal. Determine la velocidad horizontal de retroceso del cañón.

Solución

Inicialmente, antes que lance el proyectil, el cañón y el proyectil se encuentran en reposo, entonces su momento inicial es:

$$\vec{p}_i = \vec{0}$$



Al lanzar el proyectil este sale con rapidez v_0 y el cañón es impulsado en la dirección contraria con rapidez v_R. El momento horizontal después del disparo es

$$p_{f_x} = m_p v_{0_x} + M_c v_R = m_p v_0 \cos 37° + M_c v_R$$

Dado que se desprecian los efectos de roce, la fuerza neta externa que actúa sobre el sistema "cañón-proyectil" es cero, entonces el momento inicial horizontal es igual al momento final horizontal. Entonces, se tiene:

$$p_{i_x} = p_{f_x}$$
$$m_p v_0 \cos 37° + M_c v_{R_x} = 0$$
$$v_{R_x} = \frac{-m_p v_0 \cos 37°}{M_c}$$

al evaluar la relación anterior, se obtiene:

$$v_{R_x} = -5,89\left[m/s\right]$$

Ejemplo 6.2 Un niño de masa M, inicialmente en reposo, juega con una pelota de masa m = M/20, sobre un skate. Lanza horizontalmente la pelota hacia una pared con rapidez v_0. La pelota rebota y se devuelve con la misma rapidez hacia el niño. Si el niño toma la pelota que viene de vuelta, ¿qué rapidez adquiere finalmente el niño? (Suponga que el movimiento de la pelota es siempre horizontal)

Solución

Inicialmente, antes que niño tire la pelota, su momento inicial es cero. Al lanzar la pelota esta sale con rapidez v_0 y el niño es impulsado en la dirección contraria. Como la fuerza neta externa que actúa sobre el sistema "niño-pelota" es cero, entonces el momento inicial es igual al momento final y considerando que el movimiento del niño y la pelota son siempre horizontales, se tiene:

$$p_i = 0$$

$$p_f = mv_0 + Mv_{niño} = \frac{M}{20}v_0 + Mv_{niño}$$

Aplicando la conservación de momento, la rapidez del niño es:

$$0 = \frac{M}{20}v_0 + Mv_{niño}$$

$$v_{niño} = -\frac{v_0}{20}$$

donde el signo menos indica que la velocidad del niño es contraria a la velocidad de la pelota.

Luego la pelota choca contra el muro y se devuelve con igual rapidez y sentido contrario. El momento inicial para el segundo caso es:

$$p_i' = -mv_0 + Mv_{niño} = -\frac{M}{20}v_0 - M\frac{v_0}{20} = -2M\frac{v_0}{20}$$

Finalmente cuando el niño atrapa la pelota, ambos siguen con una misma rapidez v de modo que el momento final es:

$$p_f' = (m+M)v = \left(\frac{M}{20} + M\right)v = \left(\frac{21M}{20}\right)v$$

Utilizando nuevamente la conservación del momento, se tiene:

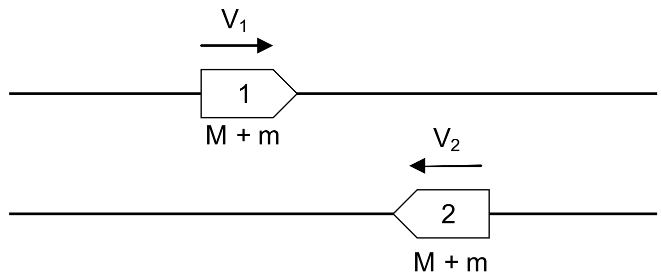
$$p_i' = p_f'$$

$$-2M\frac{v_0}{20} = \left(\frac{21M}{20}\right)v$$

y la rapidez final del niño es:

$$v = \frac{-2v_0}{21}$$

Ejemplo 6.3 Dos carros monorrieles idénticos transportan sendos pasajeros de igual masa m. Cada carro tiene masa M, no experimentan roce con sus rieles y estos son rectilíneos y paralelos, tal como se muestra en la figura adjunta. Cuando los carros se cruzan, los pasajeros saltan hacia el otro carro perpendicularmente a la dirección del movimiento, intercambiando sus posiciones. Como resultado de lo anterior, el carro "1" continúa moviéndose en la dirección original con rapidez V y el carro "2" también mantiene su dirección del movimiento, pero con rapidez 2V. Determine las rapideces V_1 y V_2, antes que los pasajeros se intercambien



Solución

Se aplica la conservación de la cantidad de movimiento lineal al sistema "carro-pasajero que salta a este carro" en la dirección de los rieles, dado que la suma de las fuerzas en tal dirección es nula. Entonces, se tiene para "carro 1 + pasajero que salta al carro1"

$$MV_1 - mV_2 = (M+m)V \tag{1}$$

y para el sistema "carro2 + pasajero que salta al carro2"

$$mV_1 - MV_2 = -(M+m)\cdot 2V \tag{2}$$

Si se divide miembro a miembro la ecuación (2) por la (1), se obtiene

$$-2(M\cdot V_1 - m\cdot V_2) = m\cdot V_1 - M\cdot V_2$$

$$(m+2M)V_1 = (2m+M)V_2 \tag{3}$$

De (3) se despeja V_1 y su igual se reemplaza en (1), con lo que se encuentra

$$\frac{M(2m+M)}{m+2M}V_2 - mV_2 = (m+M)V$$

Luego,

$$V_2 = \frac{m+2M}{M-m}V$$

Si de (3) se despeja V_2 y su igual se reemplaza en (1), se encuentra finalmente

$$V_1 = \frac{2m+M}{M-m}V$$

Ejemplo 6.4 Dos esferas pequeñas, de masas M_1 y $M_2 = 2M_1$, pueden deslizar por alambres rígidos, paralelos y lisos. Los alambres están separados una distancia d y están dispuestos en un plano horizontal. Las esferitas están unidas mediante un resorte ideal de constante de fuerza k y de longitud natural despreciable. Las esferitas se sueltan en la posición mostrada en la Fig. 1. Cuando las esferitas se encuentran en el estado que muestra la Fig. 2, determine las rapideces de las partículas.

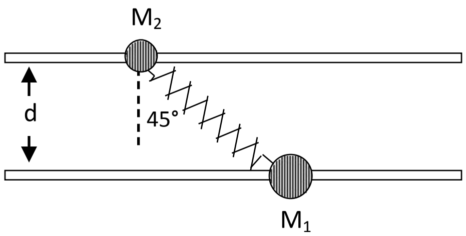


Figura 1

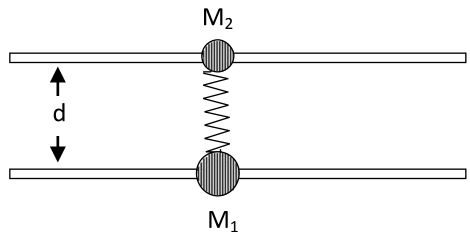


Figura 2

Solución

Como la fuerza neta que actúa sobre el sistema esferas pequeñas-resorte es nula (*¿por qué?*), entonces se conserva el momentum lineal del sistema de esferas. En particular, para la dirección horizontal (eje x), se tiene que

$$p_{i,x} = p_{f,x}$$

Puesto que la velocidad inicial de cada esferita es nula, puede anotarse

$$0 = M_1 v_1 + M_2 v_2$$

Como $M_2 = 2M_1$,

$$0 = 2M_2 v_1 + M_2 v_2$$

Entonces,

$$v_2 = -2v_1$$

Además, la energía mecánica se conserva (*¿por qué?*), de modo que

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{kd^2}{2} + \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2}$$

Como:

$$x = \frac{d}{\cos 45^o} = \sqrt{2}d \quad ,$$

$$v_2 = -2v_1 \quad \text{y}$$

$M_2 = M_1/2$,

se encuentra que

$$\frac{k \cdot 2d^2}{2} = \frac{kd^2}{2} + \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_1}{2} \cdot \frac{4v_1^2}{2}$$

$$kd^2 = 3M_1 v_1^2$$

O sea,

$$v_1 = d\sqrt{\frac{k}{3M_1}}$$

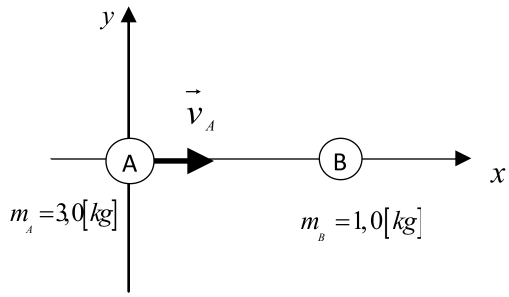
y

$$v_2 = -2d\sqrt{\frac{k}{3M_1}} = -2d\sqrt{\frac{k}{6M_2}}$$

6.4 Colisiones (Choques)

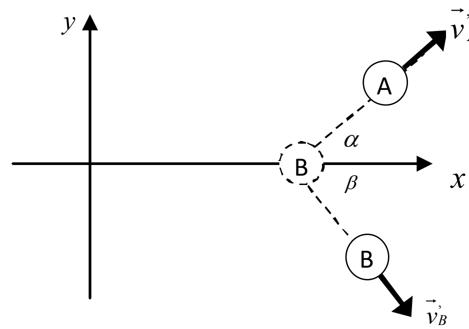
Una colisión o choque, corresponde a un encuentro violento entre dos partículas, donde el momento antes del choque es igual al momento después del choque, siempre que la sumatoria de fuerzas externas sea nula.

Ejemplo 6.5 En la figura se muestran dos bolas que se mueven por una superficie sin roce. La bola A se mueve inicialmente con una velocidad $2\hat{i}[m/s]$ y choca con la bola B inicialmente en reposo. Después de la colisión, la bola A se mueve a 1,0[m/s] en una dirección que forma un ángulo α=35° respecto al eje x. Determine la velocidad final de la bola B.



Solución

Como la fuerza neta externa que actúa sobre el sistema es nula, entonces se conserva la cantidad de movimiento lineal, esto es en ambas direcciones, ya que se trata de un movimiento bidimensional. Así el momento inicial para cada eje es:



$$p_{i_x} = m_A v_{A_x} + m_B v_{B_x} = 3 \cdot 2 = 6[kg \cdot m/s]$$
$$p_{i_y} = m_A v_{A_y} + m_B v_{B_y} = 0$$

Para determinar el momento final, se descomponen los vectores velocidad en sus componentes rectangulares, y se multiplica la velocidad en cada eje por la respectiva masa, de esta forma, el momento final para cada eje queda:

$$p_{f_x} = m_A v'_{A_x} + m_B v'_{B_x} = 3 \cdot 1\cos(35°) + 1 v'_{B_x} = 2,46 + v'_{B_x}$$
$$p_{f_y} = m_A v'_{A_y} + m_B v'_{B_y} = 3 \cdot 1 sen(35°) + 1 v'_{B_y} = 1,72 + v'_{B_y}$$

Aplicando la conservación de momento para cada eje, se tiene:

$$p_{i_x} = p_{f_x}$$
$$6 = 2,46 + v'_{B_x} \Rightarrow v'_{B_x} = 3,54[m/s]$$

$$p_{i_y} = p_{f_y}$$
$$0 = 1,72 + v'_{B_y} \Rightarrow v'_{B_y} = 1,72[m/s]$$

Luego la velocidad de la bola B es:

$$v'_B = \sqrt{(3,54)^2 + (1,72)^2} = 3,94[m/s]$$

En la dirección:

$$\beta = \arctan\left(\frac{1,72}{3,54}\right) = 25,9°$$

6.4.1 Choques Totalmente Inelásticos

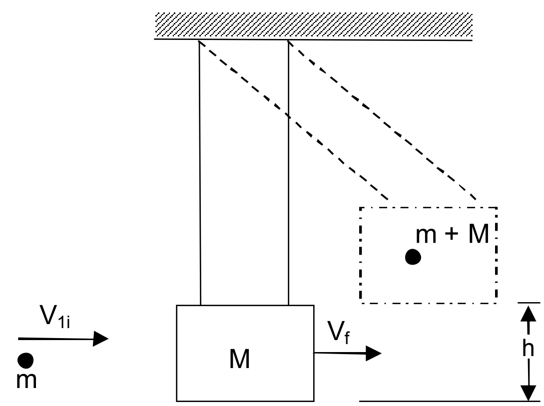
Ocurren cuando dos objetos chocan y luego ambos objetos siguen unidos moviéndose a la misma velocidad. En este caso el momento lineal se conserva (cantidad de movimiento inmediatamente antes del choque es igual a la cantidad de movimiento inmediatamente después del choque), pero la energía cinética final del sistema es menor que la inicial, ya que parte de la energía se utiliza para el objeto se incruste y sigan unidos

Ejemplo 6.6 Un proyectil es disparado contra un péndulo balístico (dispositivo que se usa para medir la velocidad de objetos rápidos, tal como una bala), cuyo centro de masa asciende 5,00 cm y luego continúa oscilando, cuando el proyectil se incrusta en él. Teniendo presente que la masa del proyectil es m = 5,0 [g] y la masa del péndulo es M = 1,0 [kg], halle la velocidad inicial del proyectil y la energía disipada en el choque del proyectil con el péndulo balístico.

<u>Solución</u>

El choque entre la bala y el bloque es perfectamente inelástico. Al escribir la conservación del momentum lineal para los instantes inmediatamente antes de la colisión e inmediatamente después, se halla

$$0{,}005V_{1i} = (1{,}00 + 0{,}005)V_f \qquad (1)$$



donde V_f es la velocidad del bloque con la bala incrustada en él. Aquí se conserva la energía mecánica del sistema proyectil-péndulo balístico después de la colisión, de modo que

$$\frac{(1{,}00 + 0{,}005)V_f^2}{2} = (1{,}00 + 0{,}005)gh$$

$$V_f = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Al sustituir (2) en (1), se encuentra

$$V_{1i} = \frac{1{,}005\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}05}}{0{,}005}$$

$$V_{1i} = 199\left[m/s\right]$$

De la ecuación (1), se determina que:

$$mV_{1i} = (m + M)V_f$$

$$V_f = \left(\frac{m}{m+M}\right)V_{1i}$$

La energía disipada, corresponde a la variación de la energía cinética antes y después del choque:

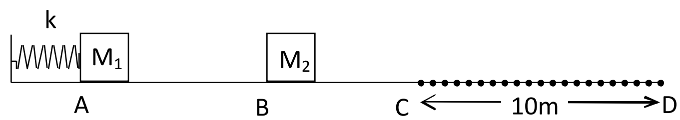
$$E_d = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m+M)\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)V_{1i}\right]^2 - \frac{1}{2}m \cdot V_{1i}$$

$$E_d = \frac{1}{2}\left((m+M)\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 - m\right) \cdot V_{1i}$$

Finalmente:

$$E_d = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m+M} - m\right)V_{1i}^2 \, .$$

Ejemplo 6.7 Un bloque, m_1= 4,0 [Kg], comprime en 0,80 [m] a un resorte de constante elástica k=10^3 [N/m], en el punto A de la figura. Se libera el bloque y se mueve hasta B, donde choca a un bloque m_2= 2,0 [kg], que se encuentra en reposo. Después del choque los bloques quedan unidos y se detienen en el punto D. Sí sólo hay roce en el tramo CD, determinar:



a) la rapidez del bloque m_1 antes del choque
b) la rapidez de los bloques inmediatamente después del choque
c) el trabajo de la fuerza de roce en el tramo CD
d) el coeficiente de roce cinético en el tramo CD

Solución

a) Dado que la energía mecánica total se conserva entre A y B, se tiene que

$$E_A = E_B$$

Es decir,

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m_1 v_B^2}{2}$$

Por tanto,

$$v_B = 12,7\left[m/s\right]$$

b) Puesto que v_2 = 0, por conservación del momentum lineal, puede anotarse que

$$m_1 v_B = (m_1 + m_2)V \, ,$$

Entonces

$$V = 8,4\left[m/s\right]$$

c) De acuerdo al teorema del trabajo y la energía

$$W_{roce} = E_D - E_C$$

ya que el roce es la única fuerza que realiza trabajo mecánico entre C y D.
Como v_D =0, entonces

$$W_{roce} = -\frac{(4,0+2,0)\cdot 8,43^2}{2}$$

$$W_{roce} = -213,2\left[J\right]$$

d) El trabajo de la fuerza de roce, está dado por

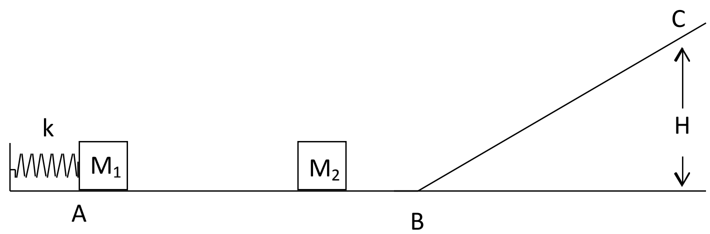
$$W_{roce} = \vec{f} \bullet \vec{d} = f \cdot d \cdot \cos\theta$$

$$W_{roce} = \mu_k N d \cdot \cos\theta$$

$$-213,2 = \mu_k \cdot 60 \cdot 10 \cdot \cos 180°$$

$$\mu_k = 0,36$$

Ejemplo 6.8 El resorte de la figura adjunta tiene una energía potencial elástica de 128 [J], cuando está comprimido por un cajón de masa M_1 = 4,0 [kg]. Cuando el resorte se expande, el cajón es impulsado y choca inelásticamente con otro cajón, de masa M_2 = 0.80 [kg], que está en movimiento sobre la recta AB. Los dos cuerpos quedan unidos y suben por un plano inclinado hasta una altura de 1,7 [m]. Si las superficies carecen de roce, determine:



a) La velocidad del cajón de masa M_1 antes de la colisión con el de masa M_2.
b) La velocidad del cajón de masa M_2 antes de la colisión con el de masa M_1.

Solución

Como la energía mecánica total se conserva antes de la colisión, entonces la energía potencial elástica del resorte es igual a la energía cinética que adquiere el cajón cuando el resorte recupera su longitud natural. O sea,

$$U_{elástica} = \frac{M_1 v_1^2}{2}$$
$$128 = \frac{4 \cdot v_1^2}{2}$$
$$v_1 = 8,0\left[m/s\right]$$

Aquí se está frente a una colisión inelástica, de modo que por conservación del momentum lineal se puede anotar que

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = (M_1 + M_2)V \tag{1}$$

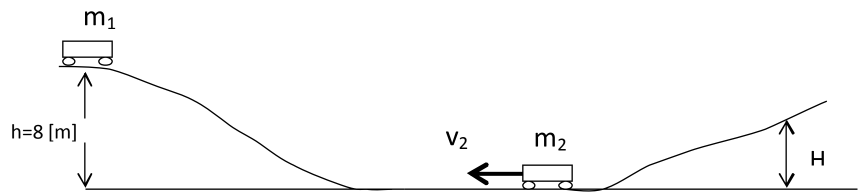
Además, por conservación de la energía mecánica total desde inmediatamente después de la colisión hasta que los cajones adquieren la altura máxima, se tiene

$$\frac{(M_1 + M_2)V^2}{2} = (M_1 + M_2)gH$$
$$V = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,7}$$
$$V = 5,83\left[m/s\right]$$

Luego, de la expresión (1)

$$v_2 = \frac{(M_1 + M_2)V - M_1 v_1}{M_2}$$
$$v_2 = \frac{4,8 \cdot 5,83 - 4,0 \cdot 8,0}{0,8}$$
$$v_2 = -5,0\left[m/s\right]$$

Ejemplo 6.9 Un vagón de ferrocarril, de masa m_1 =30 x 10^3 [kg] está frenado en lo alto de una colina. Se sueltan los frenos y el vagón desciende hasta la parte inferior de la colina, situada a 8,0 [m] por debajo de su posición original. En la parte inferior de la vía se encuentra con otro vagón de masa m_2 =15 x 10^3 [kg] que viene hacia él con una rapidez de 5,0 [m/s]. Ambos vagones chocan, quedan acoplados, y ascienden por la vía hasta una altura H. Despreciando los efectos de roce en toda la vía, determine:



a) La rapidez del primer vagón justo antes de producirse el choque.
b) La rapidez con que salen juntos los vagones después de chocar.
c) La pérdida de energía en el choque.

Solución

a) La energía mecánica total se conserva hasta justo antes del choque, de modo que

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}$$
$$v_1 = \sqrt{2gh}$$
$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 8,0}$$
$$v_1 = 12,6\left[m/s\right]$$

b) Como el momentum lineal del sistema se conserva

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V \text{ , con } v_2 = -5,0\ [m/s]$$
$$V = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 12,6 - 15 \cdot 10^3 \cdot 5,0}{45 \cdot 10^3}$$
$$V = 6,7\left[m/s\right]$$

c) La energía inicial y final del sistema son, respectivamente,

$$E_i = m_1 gh + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 30 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 8,0 + 0,5 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot (-5,0)^2 = 2,59 \cdot 10^6 \left[J\right]$$
$$E_f = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} = 0,5 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 6,7^2 = 1,01 \cdot 10^6 \left[J\right]$$

Luego,

$$\Delta E_{choque} = E_f - E_1 = -1,58 \cdot 10^6 \left[J\right]$$

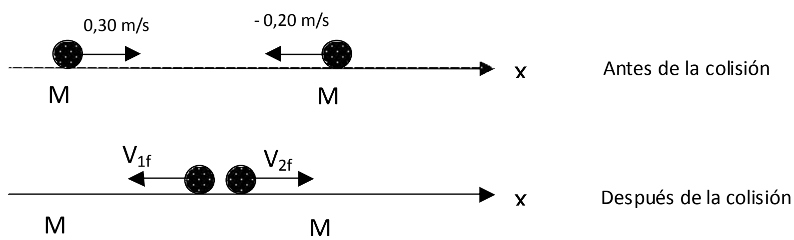
6.4.2 Choques Elásticos

En este caso, el momento lineal se conserva (cantidad de movimiento antes del choque es igual a la cantidad de movimiento después del choque), y también la energía cinética.

Ejemplo 6.10 Dos bolas de billar, de igual masa M, se mueven una hacia la otra sobre una superficie lisa y cuando colisionan lo hacen elásticamente. Las velocidades iniciales de las bolas son 0,30 m/s y -0,20 m/s, respectivamente. Determine la velocidad de cada bola inmediatamente después de la colisión.

Solución

La figura siguiente muestra un esquema de la situación de las bolas antes y después de la colisión.



Como la fuerza neta externa que actúa sobre el sistema es nula, entonces se conserva la cantidad de movimiento lineal, en particular en la dirección x, de modo que:

$$0{,}30M - 0{,}20M = MV_{1f} + MV_{2f}$$

$$0{,}10 = V_{if} + V_{2f} \qquad (1)$$

Por ser la colisión elástica, también se conserva la energía cinética del sistema, de modo que

$$\frac{0{,}30^2 M}{2} + \frac{0{,}20^2 M}{2} = \frac{MV_{1f}^2}{2} + \frac{MV_{2f}^2}{2}$$

$$0{,}13 = V_{1f}^2 + V_f^2 \qquad (2)$$

Al despejar V_{1f} de (1) e introducir su igual en (2), se obtiene

$$0{,}13 = 0{,}10^2 - 0{,}20V_{2f} + 2V_{2f}^2$$

$$v_{2f} = 0{,}30; -0{,}20\left[m/s\right]$$

Como la bola 2 no puede pasar a través de la 1, entonces v_{2f} = *0,30[m/s]*. De la expresión (1), se encuentra que v_{1f} = *-0,20[m/s]*. Por tanto, puede afirmarse que después de la colisión las bolas **¡INTERCAMBIAN VELOCIDADES!**

6.4.3 Coeficiente de Restitución

Cuando un choque se encuentra en una situación intermedia entre un choque totalmente inelástico y elástico, se define el coeficiente de restitución (e), como:

$$e = -\frac{V_{2f} - V_{1f}}{V_{2i} - V_{1i}}$$

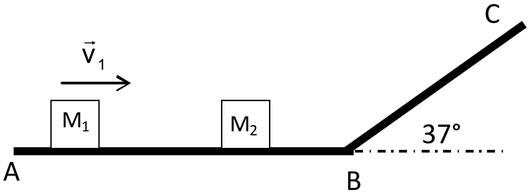
En un choque totalmente inelástico *e* = *0*, (pues $v_{2f} = v_{1f}$) y en uno elástico *e* = *1* (pues aquí $v_{2f} - v_{1f} = -v_{2i} + v_{1i}$).

Ejemplo 6.11 La figura muestra una pista ABC sin fricción. El bloque de masa M_1 = 4,0 [kg], que se mueve con una rapidez v_1 = 5 [m/s], choca frontalmente con el bloque de masa M_2 = 1,0 [kg], que se encuentra inicialmente en reposo. En el choque se pierde una energía de 10 [J]. Determine:

a) La rapidez de cada bloque inmediatamente después del choque.

b) El coeficiente de restitución para este choque.

c) La distancia que recorre el bloque M_2 sobre el plano inclinado.



Solución

a) Dado que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema constituido por los dos bloques es nula, entonces se conserva la cantidad de movimiento total, de modo que

$$P_i = P_f$$
$$M_1 v_1 = M_1 v_1' + M_2 v_2'$$
$$4\, v_1' + v_2' = 20 \qquad (1)$$

La variación de energía cinética del sistema s negativa, puesto que hay una pérdida de energía. Es decir,

$$\Delta K = K_f - K_i$$
$$\Delta K = \tfrac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} M_2 v_2'^2 - \tfrac{1}{2} M_1 v_1^2$$
$$2\, v_1'^2 + 0{,}5\, v_2'^2 - 50 = -10 \qquad (2)$$

Al despejar v_2' de la ecuación (1) y reemplazando su igual en (2), se halla

$$10\, v_1'^2 - 80\, v_1' + 160 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$v_1' = 4{,}0 \text{ [m/s]} \;\; \text{y} \;\; v_1'' = 4{,}0 \text{ [m/s]} \qquad (3)$$

De (3) y de (1), se halla que $v_1' = 4{,}0$ m/s y $v_2' = 4{,}0$ m/s . Este resultado quiere decir que los dos bloques siguen juntos después de chocar.

b) Como $\quad e = -\dfrac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$

Entonces, al reemplazar los valores hallados para v'_1 y v'_2, se determina que e = 0.

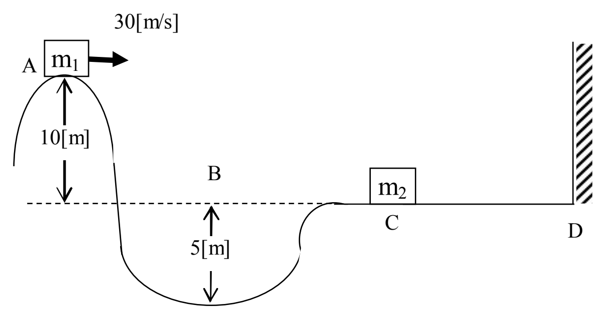
c) Como no hay fricción, se conserva la energía mecánica entre los puntos B y C, vale decir, $E_B = E_C$

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)v'^2 = (M_1 + M_2) g d sen\theta$$

De esta última expresión se obtiene

$$d = \frac{v'^2}{2 g sen\theta}$$
$$d = 1{,}33 \text{ [m]}$$

Ejemplo 6.12 Una partícula de masa m_1=100[kg], pasa por el punto A de una pista lisa de la figura, con una rapidez de 30[m/s]. En el punto C se encuentra una segunda partícula de masa m_2=150[kg]. Si el coeficiente de restitución es 0,75 entre ambas masas, determine: a) Las rapideces de ambas masas después del choque; b) la velocidad con que la masa m_2 regresa al punto C, si la masa m_2 choca de manera elástica contra un muro en el punto D de la figura.



Solución:

a) La energía inicial en el punto A debe ser igual a la energía en punto final C

$$E_A = E_C$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1A}^2 + m_1 g y = \frac{1}{2}m_1 v_{1C}^2$$

$$\frac{1}{2}100\cdot 30^2 + 100\cdot 10\cdot 10 = \frac{1}{2}100\cdot v_{1C}^2$$

$$v_{1C} = 33{,}2\left[m/s\right]$$

Como la fuerza neta externa que actúa sobre el sistema es nula, entonces se conserva la cantidad de movimiento lineal. Así:

$$p_{antes} = p_{después}$$

$$m_1\cdot v_{1C} + m_2\cdot v_{2C} = m_1\cdot v'_{1C} + m_2\cdot v'_{2C}$$

$$3320 = 100\cdot v'_{1C} + 150\cdot v'_{2C} \qquad (1)$$

Además, utilizando el coeficiente de restitución y $v_{1C} = 33{,}2\left[m/s\right]$, se tiene

$$0{,}75 = -\frac{v'_{2C} - v'_{1C}}{v_{2C} - v_{1C}}$$

$$24{,}9 = -v'_{1C} + v'_{2C} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$v'_{1C} = -1{,}66\left[m/s\right]$$

$$v'_{2C} = 23{,}2\left[m/s\right]$$

Donde el signo menos indica que la partícula uno se devuelve hacia B y la partícula dos avanza hacia C.

b) En el choque de la masa m_2 con el muro, al ser totalmente elástico e = *1*,

$$1 = -\frac{v''_{2C} - v'_p}{v'_{2C} - v_p}$$

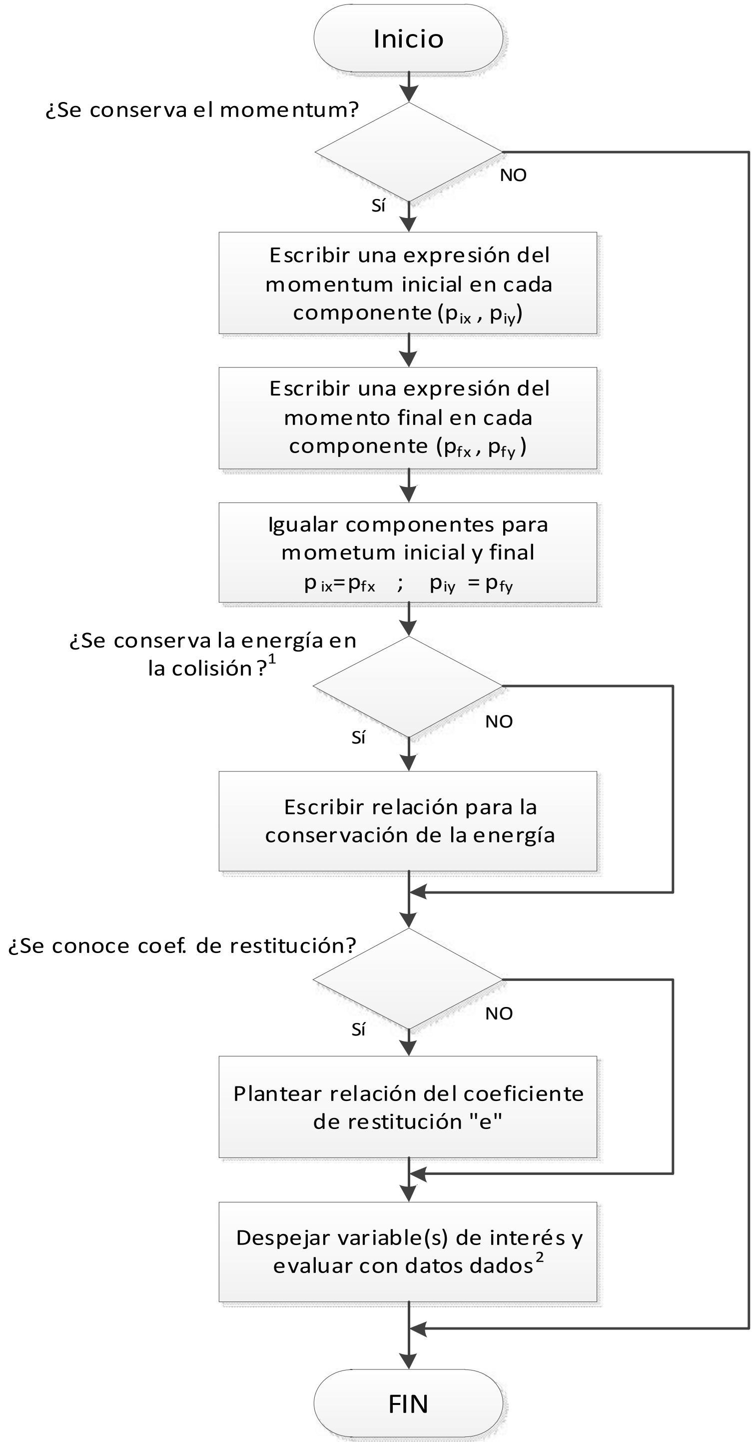
$$-v'_{2C} + v_p = v''_{2C} - v'_p$$

La velocidad de la pared es siempre cero (su masa es mucho mayor a m_2), luego:

$$v''_{2C} = -v'_{2C}$$

La masa m_2 se devuelve con la misma rapidez, después del choque con el muro.

6.5 Diagrama de flujo para poblemas de conservación del momentum lineal



[1] Recuerde que en una colisión cuando se conserva la energía, además del momentum lineal, se llama “choque elástico”.

[2] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

6.6 Problemas propuestos:

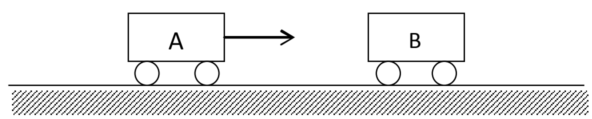
01) Una partícula de masa m se mueve en un círculo horizontal de radio r sobre una mesa rugosa. La partícula está sujeta mediante una cuerda, fija en el centro de la trayectoria circunferencial. La rapidez de la partícula es inicialmente v_0. Después de recorrer una vuelta completa, la rapidez de la partícula es $v_0/2$. a) Determinar el trabajo realizado por fricción durante una vuelta en función de m, v_0 y r. b) ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético? c) ¿Cuántas vueltas da en total la partícula antes de detenerse?

R.: $a)-\frac{3}{8}mv_0^2; b)\frac{3v_0^2}{16\pi gr}; c)\frac{4}{3}vuelta$

02) Una pelota de 60 [g] de masa se deja caer desde una altura de 2,0 [m]. Si rebota hasta una altura de 1,8 [m], calcule: a) la rapidez con qué llega la pelota al suelo; b) la rapidez con que la pelota rebota; c) el impulso aplicado por el suelo sobre la pelota; d) la pérdida de energía de la pelota en el choque contra el suelo.

R.: a) 6,3 [m/s] ; b) 6,0 [m/s] ; c) 0,74 [kgm/s], hacia arriba ; d) 0,12 [J]

03) Dos carros, A y B, se empujan uno hacia el otro. Inicialmente B está en reposo, mientras que A se mueve hacia la derecha a 0,5 [m/s]. Después del choque, A rebota a 0,1 [m/s] mientras que B se mueve hacia la derecha a 0,3 [m/s]. En un segundo experimento, A está cargado con una masa de 1,0 [kg] y se dirige hacia B con una velocidad de 0,5 [m/s]. Después de la colisión, A queda en reposo mientras que B se desplaza hacia la derecha a 0,5 [m/s]. Encontrar la masa de cada carro.

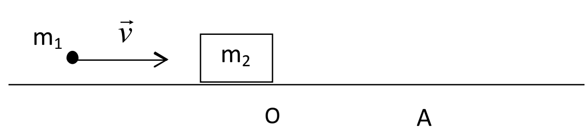


R.: m_A = 1,0 [kg]; m_B = 2,0 [kg]

04) Una pelota saltarina, de masa m = 50 [g], se deja caer desde una altura h_0 = 1,5 [m] sobre una superficie horizontal. Después del primer rebote, la pelota llega a una altura h_1 = 1,2 [m]. Determine: a) la variación del momento lineal de la pelota en este primer bote (magnitud y dirección); b) el coeficiente de restitución para este primer choque entre la pelota y el suelo; c) la altura que alcanza la pelota después del primer rebote, si el coeficiente de restitución es el mismo que en el bote.

R.: a) 0,52 [kg·m/s], hacia arriba; b) 0,894; c) 0,96 [m]

05) Una bala de masa m_1 = 10 [g], que se mueve con una velocidad $\vec{v}=100\hat{i}\left[m/s\right]$, choca con un bloque de masa m_2 = 0,99 [kg], que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. Luego del choque, la bala queda incrustada en el bloque y el conjunto recorre el tramo OA, de 0,8 [m] de longitud, hasta detenerse debido a la fricción. Calcule: a) la rapidez del bloque y la bala después del choque; b) el coeficiente de roce entre el bloque y la superficie.



R.: a) 1,0 [m/s] ; b) 0,06

06) En un acelerador de partículas se envía un haz de protones (cada uno de masa M) con una rapidez de 2,0 x 10^7 [m/s] contra un objeto gaseoso de un elemento desconocido. El detector indica que algunos protones rebotan en la misma línea después de chocar con un núcleo del elemento desconocido, saliendo con una rapidez de 1,5 x 10^7 [m/s]. Suponga que el núcleo objetivo está inicialmente en reposo y que el choque es elástico. a) Encuentre la rapidez del núcleo desconocido después del choque. b) Calcule la masa del núcleo desconocido en función de la masa M de los protones.

R.: a) 0,5 x 10^7 [m/s]; b) 7M

07) Dos bloques, de masas M y 3M, se colocan sobre una superficie horizontal sin roce. Ambas masas se encuentran unidas por una cuerda y de ese modo comprimen un resorte colocado entre ambas. De repente la cuerda que los une se corta y el bloque de masa 3M sale hacia la derecha con una rapidez de 2,0 [m/s]. A) ¿Cuál es la velocidad del bloque de masa M? b) Suponiendo que M = 1,0 [kg], que la constante del resorte es k = 192 [N/m] y que la energía se conserva, determine cuál era la compresión inicial del resorte.

R.: a) – 6 $\hat{i}$ [m/s]; b) 0,5 [m]

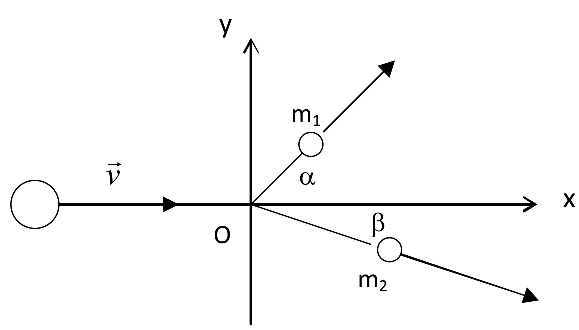
08) Los objetos "1" y "2" resbalan sobre una superficie horizontal y lisa en la dirección *+x*. Después de la colisión, determine: a) las rapideces de cada objeto; b) el cambio de momentum de cada objeto.

$m_1=4,0[kg]$; $m_2=5,0[kg]$

$v_1=1,2[m/s]$; $v_2=0,60[m/s]$

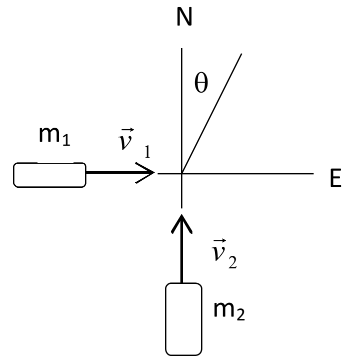
R.: a)

09) Una partícula que se mueve con una velocidad $\vec{v}=13\hat{i}\,[m/s]$. En el instante en que pasa por el origen O se desintegra en dos fragmentos de masas m_1 = 370 [g] y m_2 = 450 [g], los cuales salen formando los ángulos α = 56° y β = 21° que se muestran en la figura. Determine la rapidez de cada fragmento y la energía liberada en la desintegración.



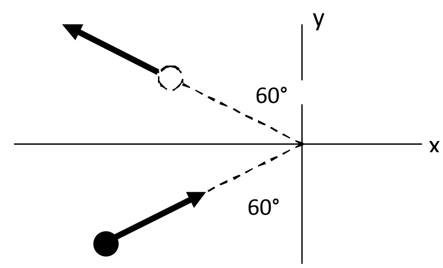
R.: v_1 = 10,57 [m/s] ; v_2 = 20,17 [m/s] ;
ΔK = 43 [J]

10) Una barcaza, de masa $m_1 = 1{,}5 \times 10^5$ [kg], navega directamente hacia el este a una velocidad $v_1 = 6{,}2$ [m/s] en un "mar tranquilo". Debido a una densa niebla y escasa visibilidad existente, choca contra otra barcaza de masa $m_2 = 2{,}8 \times 10^5$ [kg] que viaja hacia el norte con una rapidez $v_2 = 4{,}3$ [m/s]. Inmediatamente después del choque, la segunda barcaza sufre una desviación, en un ángulo $\theta = 18°$ hacia el este respecto a su dirección original y su rapidez aumenta a $v_2' = 5{,}1$ [m/s]. Determine: a) la velocidad (magnitud y dirección) de la primera barcaza, inmediatamente después del choque; b) la energía que se disipa durante el choque.



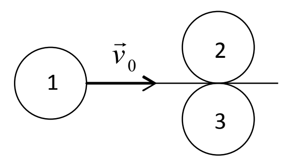
R.: a) 3,4 [m/s] ; 17,5° al sur del este ; b) $-9{,}63 \times 10^5$ [J]

11) Una bola de acero de 3,0 [kg] golpea una pared con una rapidez de 10 [m/s], formando un ángulo de 60° con la superficie. Bota con la misma rapidez y ángulo (o sea, hay un choque elástico con la superficie). Si la bola está en contacto con la pared durante 0,20 [s], ¿cuál es la fuerza media ejercida por la pared sobre la bola?



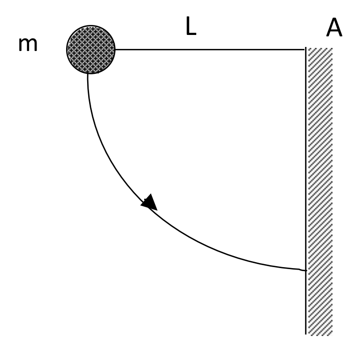
R.: $-260\hat{i}\,[N]$

12) Una bola, que se desplaza con una rapidez inicial v_0=10 [m/s] choca elásticamente con dos bolas idénticas cuyos centros se encuentran sobre una línea perpendicular a la velocidad inicial $\overrightarrow{v_0}$ y que están en contacto, como se muestra en la figura. La bola incidente se dirige exactamente al punto de contacto. Encuentre la velocidad de cada una de las bolas después de la colisión, si se desprecia cualquier efecto de rozamiento.



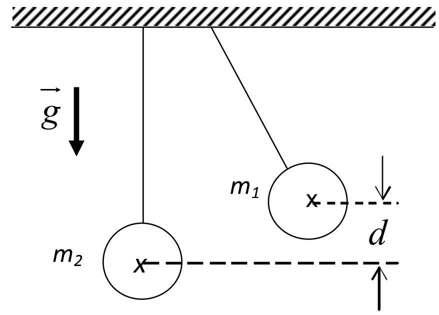
R.: v_1 = -2,0 [m/s]; $v_2 = v_3$ = 6,93 [m/s]

13) Una bola de masa m = 0,5 [kg] se amarra de una cuerda de longitud L = 75 [cm], a un punto fijo A. La bola se suelta desde el reposo cuando la cuerda está en posición horizontal. En la parte más baja de su trayectoria la bola choca inelásticamente contra la pared. Dado que el coeficiente de restitución entre la bola y la pared es e = 0,8, determine: a) la rapidez de la bola en el momento de chocar contra la pared; b) la rapidez de la bola justo después de chocar; c) el ángulo que forma la cuerda con la vertical cuando la bola se detiene momentáneamente, después del primer rebote.



R.: a) 3,9 [m/s]; b) 3,1 [m/s]; c) 69°

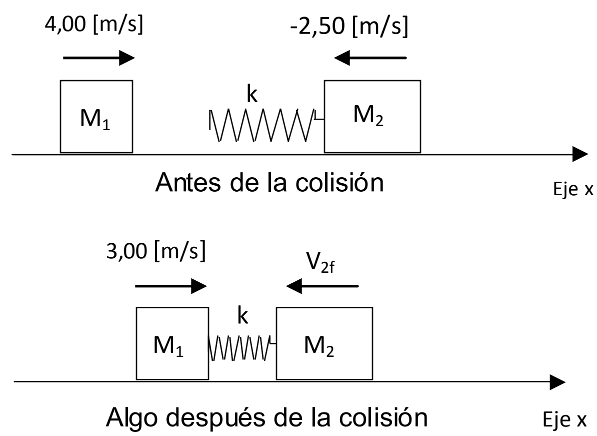
14) Las masas de las esferas de la figura adjunta son $m_1=0,10$[kg] y $m_2=0,20$[kg] y penden de sendas cuerdas ideales. Si la esfera de menor masa se suelta de la posición para la cual $d=0,20$[m], determine las alturas que alcanzará cada esfera después de chocar, cuando la colisión es: a) elástica; b) inelástica con un coeficiente de restitución igual a 0,9; c) plástica o inelástica.



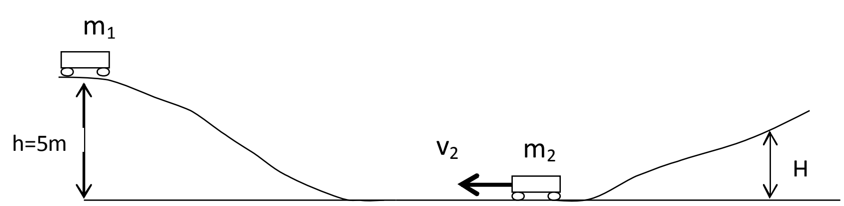
R.: a) 0,022[m] y 0,089[m]; b)0,014[m] y 0,080[m]; c) 0,022[m] y 0,022[m]

15) Dos bloques, de masas M_1= 1,60 [kg] y M_2= 2,10 [kg], se mueven sobre un mismo riel horizontal y liso. El bloque "2" tiene sujeto un resorte ideal de constante de fuerza k = 600 [N/m]. Para el instante en que el bloque "1" se desplaza una rapidez de 3,0 [m/s] (ver figura), determine: a) la velocidad del segundo bloque, b) la distancia que se ha comprimido el resorte.

R.: a) -1,74[m/s]; b) 0,17[m]



16) Un vagón de ferrocarril, de masa m_1 =20 ·10^3 [kg], está frenado en lo alto de una colina. Se sueltan los frenos y el vagón desciende hasta la parte inferior de la colina, situada a 5 [m] por debajo de su posición original. En la parte inferior de la vía se encuentra con otro vagón de masa m_2 =10 ·10^3 [kg] que viene hacia él con una rapidez de 5 [m/s]. Ambos vagones chocan, quedan acoplados, y ascienden por la vía hasta una altura H. Despreciando los efectos de roce en toda la vía, determine: a) la rapidez del primer vagón justo antes de producirse el choque, b) la rapidez con que salen juntos los vagones después de chocar, c) la altura H a la cual ascienden los vagones, d) la pérdida de energía en el choque.



R.: a) 10 [m/s] ; b) 5 [m/s] ; c) 1,25 [m] ; d) –75 ·10^4 [J]

17) Desde una torre de 95 [m] de altura, un estudiante de geología deja caer una esfera de acero y un segundo después, otro estudiante de geología lanza desde el suelo una esfera idéntica - en la misma vertical - de modo que ambas chocan elásticamente en el punto medio de la trayectoria. Determine:

a) La nueva rapidez de cada esfera inmediatamente después de la colisión si las velocidades hacia arriba se consideran positivas y hacia abajo, negativas.

b) La nueva altura que alcanza la primera esfera.

c) La altura que habría alcanzado la segunda esfera si no hubiese chocado.

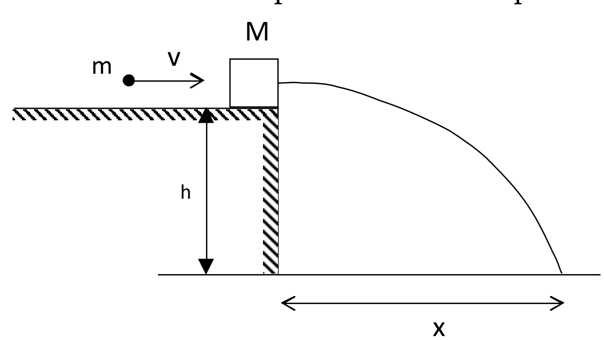
R.: a) v'_1 =12,3 [m/s], v'_2 = - 30,5 [m/s]; b) 55,2 [m]; c) 55,2 [m]

18) Se lanza una pelota de 0,2 [kg] con una rapidez inicial de 25 [m/s], formando un ángulo de 53° respecto de la horizontal. a) ¿Cuál es la energía mecánica total, inicialmente?; b) ¿Cuál es la energía cinética mínima durante el vuelo de la pelota? ¿En qué punto tiene su energía cinética mínima? c) ¿Cuál es la energía potencial máxima de la pelota durante su vuelo? d) Hallar la altura máxima alcanzada por la pelota.

R.: a) 62,5 [J] ; b) 22,5 [J] ; c) 40 [J] ; d) 20 [m]

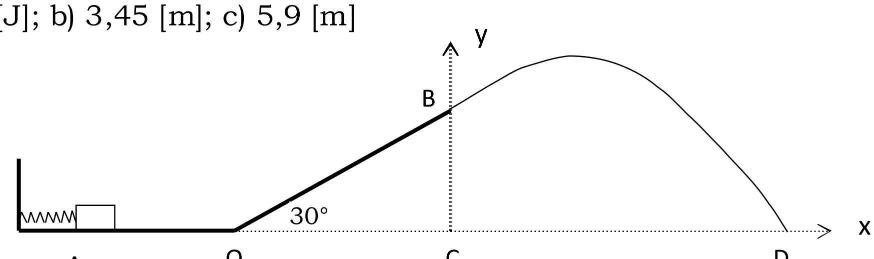
19) Se dispara una bala, de masa m = 15 [g], hacia un bloque de masa M = 2,5 [kg] que se encuentra inicialmente en reposo, en el borde de un mesón sin fricción de altura h = 1,2 [m]. La bala llega horizontalmente al bloque con una rapidez v = 450 [m/s] y se incrusta en él. Después del impacto, el bloque cae al suelo. Determine: a) la rapidez del bloque inmediatamente después del impacto; b) el tiempo de caída del bloque; c) la distancia x, medida desde la proyección del borde del mesón, hasta donde cae finalmente el bloque.

R.: a)2,68[m/s]; b) 0,49[s]; c) 1,31[m]



20) Un bloque de 5,0 [kg] de masa se encuentra en reposo en el punto A, comprimiendo un resorte de constante k = 1550 [N/m] . La compresión del resorte es 0,6 [m]. El bloque es soltado en A, sigue moviéndose por un plano horizontal suave y luego sube por un plano OB áspero inclinado en 30° (μ_k = 0,15). En la figura, la distancia OC = 5,2 [m]. El bloque sale del plano inclinado en el punto B, aterrizando luego en el punto D. Determine: a) el trabajo realizado por la fuerza de roce en todo el trayecto, desde A a D; b) la altura máxima alcanzada por el bloque después que sale desde B, con respecto al nivel del suelo; c) la distancia horizontal CD recorrida por el bloque.

R.: a) –39 [J]; b) 3,45 [m]; c) 5,9 [m]



21) Un bloque de madera de masa M = 2,0 [kg] está en reposo sobre una mesa. A través de un orificio pequeño practicado en la mesa, se dispara verticalmente hacia arriba una bala de masa m = 15 [g] la que queda incrustada en el bloque, que sale despedido hacia arriba. Un reloj electrónico mide el intervalo de tiempo entre el disparo y la caída del bloque sobre la mesa, el que es Δt = 0,86 [s]. Encuentre la rapidez inicial de la bala y el valor de la energía disipada cuando la bala se incrustó en el bloque.

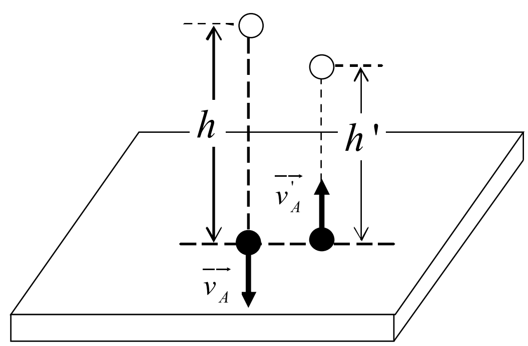
R.: $5{,}7 \cdot 10^2$ [m/s]; $-2{,}4 \cdot 10^3$ [J]

22) Una medida de la elasticidad en una colisión frontal o de la conservación de la energía cinética en una colisión frontal de dos objetos está dada por el "coeficiente de restitución" (*e*), definido por

$$e = -\frac{v_B' - v_A'}{v_B - v_A}$$

donde $v_B' - v_A'$ es la velocidad relativa , del objeto B respecto de A, después de la colisión y $v_B - v_A$ es su velocidad relativa antes del choque.

a) Demuestre que e=1 para una colisión perfectamente elástica.
b) Demuestre que e=0 para una colisión perfectamente inelástica.
c) Un objeto se suelta de cierta altura sobre una placa muy dura y pesada. Determine una relación para "e" en términos de la altura inicial "h" y la altura máxima "h' " que alcanza después de una colisión.



R.: $\sqrt{\frac{h'}{h}}$

23) Un objeto en reposo se rompe súbitamente en dos fragmentos, A y B, como resultado de una explosión. El fragmento A adquiere el doble de la energía cinética de B. Halle la razón entre las masas de los fragmentos

R.: $m_B = 2m_A$

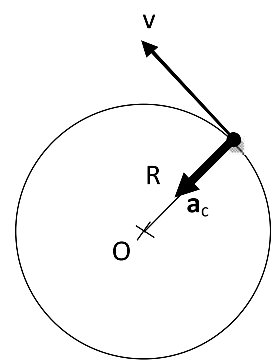
7 Movimiento Circunferencial

Una partícula escribe un movimiento circunferencial cuando describe una trayectoria circunferencial. En principio, es de interés centrarse en el estudio de dos tipos de este movimiento: el movimiento circunferencial uniforme (MCU) y el movimiento circunferencial uniformemente acelerado o variado (MCUA)

7.1 Movimiento circunferencial uniforme

Una partícula describe un MCU cuando emplea el mismo tiempo para describir una vuelta. Este tiempo se denomina período (T) y el número de vueltas que da en la unidad de tiempo corresponde a la frecuencia (f), de modo que

$$T = \frac{1}{f}$$



En el SI, el período se mide en [s] y la frecuencia en [1/s] = [Hz]. El vector velocidad **v** es perpendicular al radio y el vector aceleración centrípeta $\mathbf{a}_c$ o aceleración radial tiene la dirección del radio en ese instante y su sentido es hacia el centro de la circunferencia. En esta situación, el vector velocidad mantiene constante su magnitud, pero como varía su dirección y su sentido, la partícula acelera y esta aceleración es la que se califica de centrípeta.

La magnitud de la rapidez está dada por

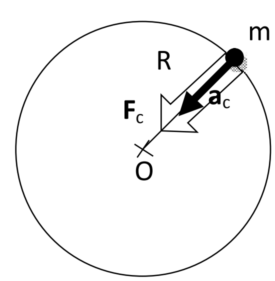
$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$$

y la de la aceleración centrípeta puede expresarse como

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2 R f^2$$

De acuerdo a la Segunda Ley de Newton, como la partícula experimenta una aceleración $\mathbf{a}_c$ ello significa que sobre ella obra una fuerza neta, también dirigida hacia el centro de la trayectoria, la que recibe el nombre de fuerza centrípeta $\mathbf{F}_c$

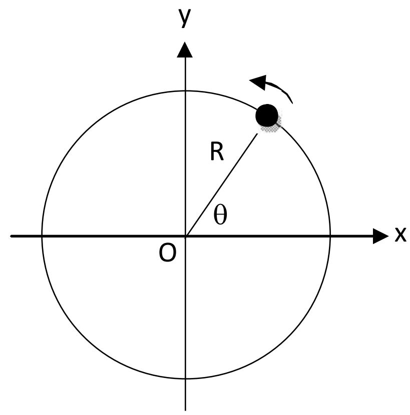
$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$



Fuerza centrípeta es un nombre genérico que recibe la fuerza neta que se ejerce sobre una partícula que describe un MCU, es decir, en una situación la tensión puede comportarse como fuerza centrípeta o quizás el peso o la resultante entre la normal y el peso, etc.

7.2 Movimiento circunferencial uniformemente acelerado

Una partícula describe un MCUA cuando ella experimenta una aceleración constante, de modo que en este caso carece de sentido hablar del período de una partícula, ya que en cada vuelta sucesiva podrá emplear más o menos tiempo según esté aumentando o disminuyendo su rapidez.



Cuando una partícula describe una trayectoria circular es de utilidad definir variables angulares, tales como la posición angular θ [rad], la velocidad angular ω [rad/s] y la aceleración angular α [rad/s^2].

Cuando la partícula gira con aceleración constante en un plano xy, respecto de un punto O, se dispone de las siguientes expresiones para describir su movimiento:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$$

$$2\alpha\left(\theta - \theta_0\right) = \omega^2 - \omega_0^2$$

Además, también se puede contar con relaciones que "conecten" variables de "traslación" con angulares (de "rotación"). En efecto,

$$v = R\omega$$

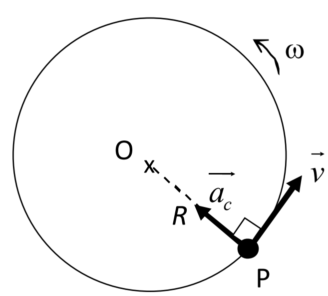
$$a_t = R\alpha$$

Donde "a_t" se conoce como aceleración tangencial. Por tanto, la magnitud de la aceleración que experimenta la partícula es

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4 \cdot \pi^2 R f^2$$

Ejemplo 7.1 Una partícula P adherida al borde de un disco que gira en torno a un eje que pasa por O, se encuentra a 1,5[m] de O, y da 30 vueltas cada minuto. Determine: a) el periodo; b) la frecuencia; c) la velocidad angular; d) la velocidad "tangencial"; e) la aceleración centrípeta o normal y f) la aceleración tangencial



Solución

a) $$\frac{30[vueltas]}{60[s]} = \frac{1[vuelta]}{T[s]}$$

$$T = \frac{60}{30} = 2{,}0[s]$$

b) $f = \dfrac{1}{T}$

$f = 0,5[Hz]$

c) $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{2}$

$\omega = \pi[rad/s] = 3,1[rad/s]$

d) $v = \omega R$

$v = \pi \cdot 1,5$

$v = 4,7[m/s]$

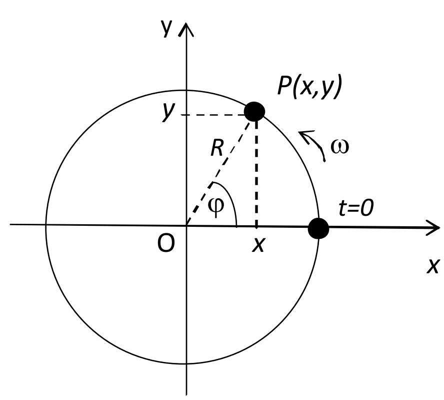
e) $a_c = \dfrac{v^2}{R}$

$a_c = \dfrac{1,5^2\pi^2}{1,5}$

$a_c = 1,5 \cdot \pi^2[m/s^2] = 14,8[m/s^2]$

f) $a_t = 0$, pues la aceleración angular es nula (la rapidez angular es constante)

Ejemplo 7.2 Una partícula se mueve con movimiento circunferencial uniforme, en una circunferencia de radio *R* = *60*[cm] y con rapidez angular ω de 1,5[rad/s]. Inicialmente las coordenadas de la partícula con *x(0)=R* e *y(0)=0*. Determine:



a) El vector posición de la partícula en t =1,0[s]
b) La velocidad de la partícula en t =1,0[s]
c) La aceleración de la partícula en t =1,0[s]
d) El ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración en t =1,0[s]
e) La magnitud de los vectores aceleración normal y aceleración tangencial en t =1,0[s]

Solución

a) En general, para el plano xy, el vector posición está dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Para esta situación

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

de modo que

$$\vec{r} = R\cos\varphi\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{j}$$

como

$$\varphi = \omega t$$

se tiene

$$\vec{r} = R\cos\omega t\,\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}$$

En este caso

$$\vec{r}(1,0) = 0,60\cos\left(1,5\cdot 1,0\right)\hat{i} + 0,60\,\mathrm{sen}\left(1,5\cdot 1,0\right)\hat{j}$$

$$\vec{r}\left(1,0\right) = \left(0,042\hat{i} + 0,598\,\hat{j}\right)\left[m\right]$$

b)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\hat{i} + R\omega\cos\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{v}(1,0) = -0,60\cdot 1,5\,\mathrm{sen}\left(1,5\cdot 1,0\right)\hat{i} + 0,60\cdot 1,5\cos\left(1,5\cdot 1,0\right)\hat{j}$$

$$\vec{v}(1,0) = \left(-0,898\hat{i} + 0,064\,\hat{j}\right)\left[m/s\right]$$

c)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\hat{i} - R\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2\left(R\cos\omega t\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{a}\left(1,0\right) = -1,5^2\left(0,042\hat{i} + 0,598\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{a}\left(1,0\right) = \left(-0,095\hat{i} - 1,35\,\hat{j}\right)\left[m/s^2\right]$$

d) El ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{a}$ se puede determinar a partir del producto punto entre ellos

$$\vec{v}\bullet\vec{a} = v\cdot a\cos\delta = v_x a_x + v_y a_y$$

$$\cos\delta = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v\cdot a}$$

$$\cos\delta = \frac{(-0,898)(-0,095) + 0,064(-1,35)}{\sqrt{(-0,898)^2 + 0,064^2}\cdot\sqrt{(-0,095)^2 + (-1,35)^2}}$$

$$\delta = 1,57[rad] = 90°$$

¿Significa el resultado obtenido en este caso $\vec{a} = \vec{a_c}$?

e) $a_c = \dfrac{v^2}{R}$

$$a_c(1,0) = \frac{(-0,898)^2 + 0,064^2}{0,60}$$

$a_c = 1,35[m/s^2]$

$a_t = 0$ ¿Por qué?

Ejemplo 7.3 Un vehículo monorriel experimental se mueve por una vía circunferencial de 500[m] de radio. Parte del reposo, se mueve con movimiento uniformemente acelerado y a los 60[s] su rapidez es de 36,0[km/h]. Determine:

a) La aceleración tangencial en el instante t=60[s] y t=80[s]
b) La aceleración normal o centrípeta en el instante t=60[s]
c) La aceleración en el instante t=60[s]
d) La rapidez angular a los 40[s]
e) El número de vueltas dado por el vehículo hasta t=2[h]

Solución

a) $v(60) = v_0 + a_t t \qquad v_0 = 0 \qquad$ y $\qquad v(60) = 36,0[km/h] = 10,0[m/s]$

$$10 = a_t \cdot 60$$

$$a_t(60) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}[m/s^2]$$

$$a_t(80) = a_t(60) = \frac{1}{6}[m/s^2] = 0,17[m/s^2]$$

b)
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{500}$$

$$a_c = 0,2[m/s^2]$$

c)
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{0,17^2 + 0,20^2}$$

$$a = 0,26[m/s^2]$$

d)
$$\omega(40) = \omega_0 + \alpha \cdot 40\,, \qquad \omega_0 = 0\,, \qquad \alpha = \frac{a_t}{R}$$

$$\alpha = \frac{0,17}{500}$$

$$\alpha = 3,33 \times 10^{-4}[rad/s^2]$$

$$\omega(40) = 3,33 \times 10^{-4} \cdot 40$$

$$\omega(40) = 1,33 \times 10^{-2}[rad/s]$$

e)
$$N = \frac{\theta(7200)}{2\pi}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Con $\theta_0 = 0[rad]$, $\omega_0 = 0[rad/s]$ y $\alpha = 3,33 \times 10^{-4}[rad/s^2]$

$$\theta(7200) = \frac{1}{2} 3,33 \times 10^{-4} \times 7200^2$$

$$\theta(7200) = 8,63 \times 10^3[rad]$$

$$N = \frac{8,63 \times 10^3}{2\pi}$$

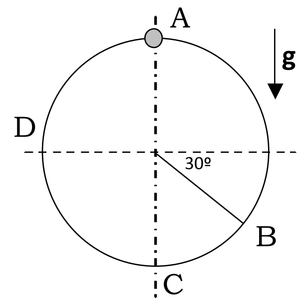
$$N = 1,37 \times 10^3[vueltas]$$

Ejemplo 7.4 Una argolla de masa M=0,1[kg] da vueltas en torno a un aro de radio R=0,20[m], que se ubica en un plano vertical. Sí la argolla se suelta desde el punto A, determine:

a) La energía mecánica de la argolla al pasar por el punto B.

b) La magnitud de la reacción normal que ejerce el aro sobre la argolla al pasar por el punto C.

c) La rapidez de la argolla al pasar por el punto D.

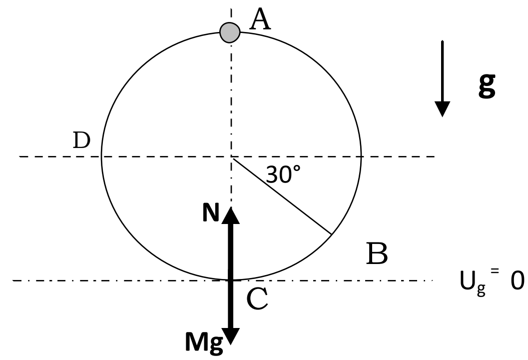


Solución

a) Dado que la energía mecánica total se conserva entre A y B, se tiene que

$$E_A = E_B$$

En la figura adjunta, se indica el nivel de referencia para la energía potencial U_g.



$$0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}4 = E_B$$

$$E_B = 0{,}4[J]$$

b) De acuerdo al diagrama de fuerzas de la argolla cuando pasa por C, se tiene

$$N - Mg = M\,\frac{v_C^2}{R}$$

Además, dado que la energía mecánica total se conserva entre A y C, se tiene que

$$E_A = E_C$$

$$2MgR = \frac{Mv_C^2}{2}$$

$$v_C^2 = 4gR$$

Luego,

$$N = M\,\frac{4gR}{R} + Mg$$

$$N = 5\ [\text{N}]$$

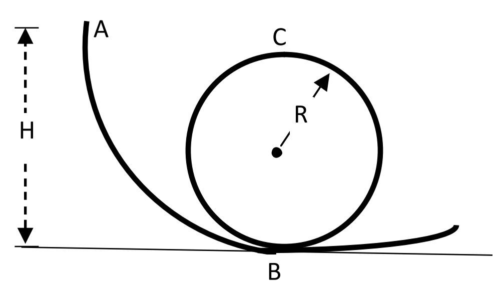
c) Puesto que la energía mecánica total se conserva entre A y D, se tiene que

$$E_A = E_D$$

$$2MgR = MgR + \frac{Mv_D^2}{2}$$

$$v_D = 2{,}0\ [m/s]$$

Ejemplo 7.5 Un carro (masa: 200,0 [kg]) de un parque de diversiones rueda sin fricción por la vía de la figura adjunta (la "vía de la muerte"). El carro se suelta desde A, a una altura H sobre la base del lazo (loop). Si H = 80,0 [m] y R = 25,0 [m], determine:



a) La aceleración normal o radial del carro cuando pasa por B. Haga diagrama de cuerpo libre en B.

b) La magnitud de la fuerza que ejerce la vía sobre el carro, cuando pasa por C. Haga diagrama de cuerpo libre en C.

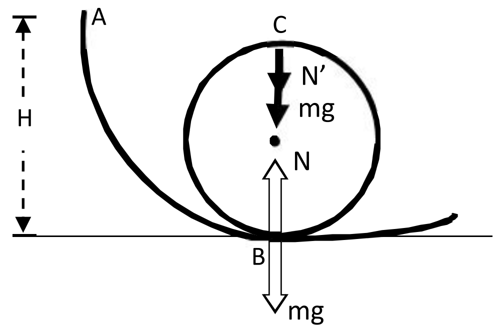
c) El valor mínimo que debe tener H para que el carro no caiga cuando pasa por C

d) La aceleración tangencial del carro cuando pasa por C.

Solución

a) Una expresión para la aceleración normal del carro cuando pasa por B es

$$a_B = \frac{v_B^2}{R}$$



Puesto que la vía es lisa, se conserva la energía mecánica total, de modo que

$$E_A = E_B$$

$$mgH = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$v_B^2 = 2gH$$

$$a_B = \frac{2gH}{R}$$

$$a_B = \frac{2\cdot 10\cdot 80}{25} = 64 \text{ [m/s}^2]$$

b) Cuando el carro pasa por el punto C de la vía, experimenta una fuerza neta

$$N' + mg = \frac{mv_C^2}{R}$$

además, por conservación de la energía mecánica total,

$$E_A = E_C$$

$$mgH = mg\cdot 2R + \frac{mv_C^2}{R}$$

$$v_C^2 = 2\left(H - 2R\right)g$$

$$v_C^2 = 2\left(80 - 50\right)10 = 600 \text{ [m}^2/\text{s}^2]$$

La fuerza que ejerce la vía sobre el carro cuando pasa por C es

$$N' = \frac{200\cdot 600}{25} - 200\cdot 10$$

$$N' = 2{,}8 \cdot 10^3 \text{ [N]}$$

c) La aceleración tangencial del carro cuando pasa por C es igual a cero, pues en ese punto el carro no experimenta fuerza horizontal alguna (vale decir, la fuerza neta horizontal es cero).

d) La altura mínima "h" significa que el carro tiene inicialmente la mínima energía posible para que al llegar al punto C **sólo** experimente la acción de su fuerza peso, es decir, sólo el peso del carro provea de fuerza centrípeta. En otras palabras, cuando el carro pasa por C justo ha dejado de estar en contacto con la vía.

Entonces, $$mg = \frac{mv_C^2}{R}$$

$$v_C^2 = gR$$

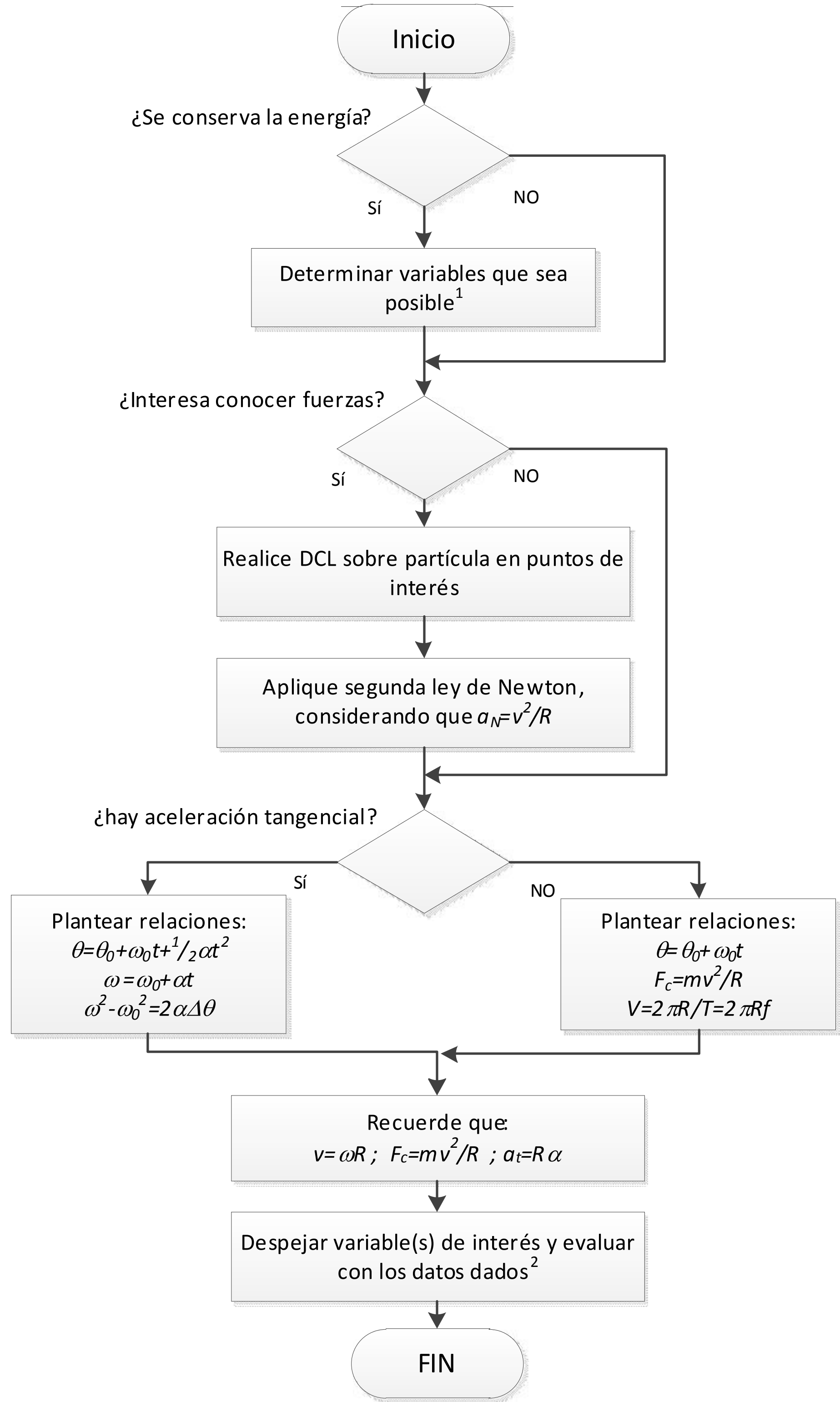
Además, por conservación de la energía mecánica total y teniendo presente la última expresión para v_C, se puede anotar

$$mgh = mg\cdot 2R + \frac{mgR}{2}$$

$$h = 2R + R/2$$

$$h = 75 \text{ [m]}$$

7.3 Diagrama de flujo para problemas de movimiento circular



[1] Suele ser posible a partir de la relación de conservación de la energía determinar la rapidez de la partícula en un punto.

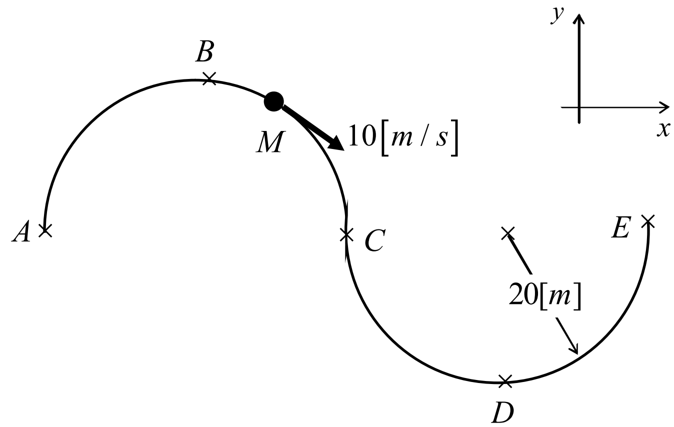
[2] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

7.4 Ejercicios propuestos

01) Una polea de 5 [cm] de radio, que pertenece a un motor, está girando a 30 [rps] y disminuye su velocidad uniformemente hasta 20 [rps] en 2 [s]. Calcule: a) la aceleración angular del motor en rad/s²; b) el número de revoluciones que efectúa en este tiempo, c) la longitud de la banda que la polea desenreda en ese tiempo.

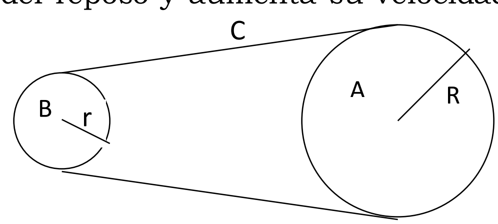
R.: a) -10π [rad/s²]; b) 50 [rev] ; c) 15,7 [m]

02) Un carro M de un parque de diversiones se mueve con rapidez constante por una vía horizontal, cosntituida por dos semicircunferencias de 10[cm] de radio, unidas en el punto C por el extremo de un diámetro. Determine la velocidad y aceleración del carro en los puntos A, B, C, D y E. (Sugerencia: ¿Qué valor tiene el radio de curvatura en C?)



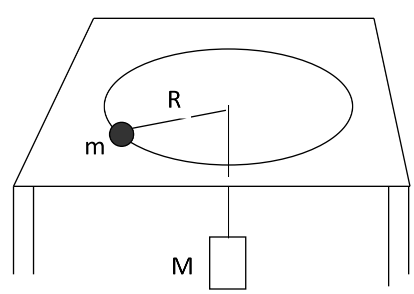
R.: $\overrightarrow{v_A} = 10\hat{j}\left[m/s\right]$, $\overrightarrow{a_A} = 5\hat{i}\left[m/s^2\right]$; $\overrightarrow{v_B} = 10\hat{i}\left[m/s\right]$, $\overrightarrow{a_B} = -5\hat{j}\left[m/s^2\right]$; $\overrightarrow{v_C} = -10\hat{j}\left[m/s\right]$, $\overrightarrow{a_C} = 0\left[m/s^2\right]$; $\overrightarrow{v_D} = 10\hat{i}\left[m/s\right]$, $\overrightarrow{a_D} = 5\hat{j}\left[m/s^2\right]$; $\overrightarrow{v_E} = 10\hat{j}\left[m/s\right]$, $\overrightarrow{a_E} = -5\hat{i}\left[m/s^2\right]$;

03) La rueda A, cuyo radio es de 30 [cm], parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razón de 0,4π [rad/s²]. La rueda transmite su movimiento a la rueda B, de 12 [cm] de radio, mediante la correa C. Obtenga una relación entre las aceleraciones angulares y los radios de las dos ruedas. Encuentre el tiempo necesario para que la rueda B alcance una velocidad angular de 300 [rpm].



R.: 10 s

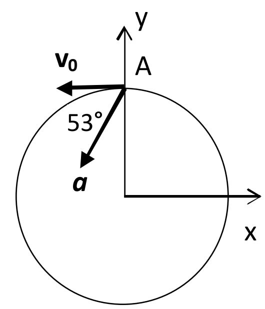
04) En un disco horizontal de 20 [cm] de radio se coloca una partícula en un punto del borde. Si el disco parte del reposo con una aceleración angular de 0,2 [rad/s²], determine: a) la velocidad angular, la rapidez y las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal de la partícula al cabo de 5 [min] de iniciado el movimiento; b) el desplazamiento angular y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo.



R.: a) 60 [rad/s]; 12 [m/s]; 0,04 [m/s²]; 720 [m/s²]; b) 9×10^3 [rad]; 1800 [m]

05) Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 2,0 [m] en sentido antihorario con rapidez uniformemente creciente. En t = 0 pasa por el punto A de la figura con una velocidad angular ω_o=4k [rad/s] y su aceleración forma un ángulo de 53° con la velocidad. Determine: a) las componentes normal y tangencial de la aceleración en t = 0; b) el tiempo que demora la partícula en pasar de nuevo por A (por primera vez).

R.: a) 32 [m/s^2] ; 24 [m/s^2] ; b) 0,74 [s]

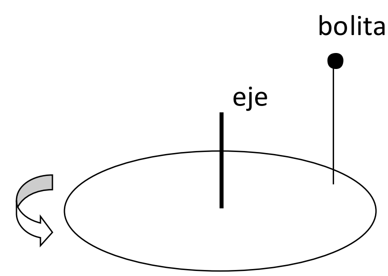


06) Una pulga está en un punto A sobre el plato de un tocadiscos, a 10 [cm] del centro. El tocadiscos está girando a 33 $^1/_3$ [rpm] en la dirección de las manecillas del reloj. La pulga salta verticalmente hacia arriba a una altura de 5 [cm] y aterriza sobre el tocadiscos en un punto B. Sitúe el origen de coordenadas en el centro del tocadiscos con el eje x positivo fijo en el espacio y pasando a través de A. a) Encuentre el desplazamiento de la pulga hasta el momento en que cae al tocadiscos. b) Determine la posición del punto A cuando la pulga aterriza. c) Determine la posición del punto B cuando la pulga aterriza.

R.: a) $-7\hat{j}[cm]$; b) $\left(7{,}66\hat{i}-6{,}43\hat{j}\right)[cm]$; c) $\left(10\hat{i}-7\hat{j}\right)[cm]$

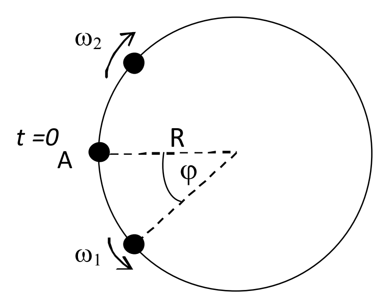
07) Se tiene un disco de 15 [cm] de radio que gira en un plano horizontal en torno a un eje que pasa por su centro. En el borde del disco hay 30 agujeros distribuidos uniformemente. Se deja caer bolitas, una cada 0,1 segundos, tratando de que las bolitas atraviesen los agujeros, sin chocar con el disco. a) ¿Cuál es la mínima velocidad angular con que debe girar el disco de modo que las bolitas pasen sin chocar con él? Exprese su resultado en rpm. b) En ese caso, ¿cuál es el período del movimiento del disco? c) ¿Con qué velocidad angular debe girar el disco para que las bolitas lo atraviesen saltándose un agujero por medio?

R.: a) 20 [rpm]; b) 3[s]; c) 40 [rpm]



08) Desde el mismo punto A de una circunferencia parten dos móviles, 1 y 2, en sentidos opuestos. El primero recorre la circunferencia en 2,0[h] 4,0[min], en tanto que el segundo recorre un arco de 6° 30’ cada 1,0[min]. Encuentre en que punto de la circunferencia volverán a coincidir sus posiciones y cuánto tiempo requieren para ello.

R.: φ=111°; t=38,3[min]



09) Un disco colocado en un antiguo tocadiscos gira a 33 $^1/_3$ [rpm]. En cierto instante, se produce un "corte de electricidad" y el disco frena con aceleración constante, deteniéndose al cabo de 20,0[s]. Para el disco determine: a) la aceleración angular; b) la rapidez angular al cabo de 12,0[s]; c) el número de vueltas antes de detenerse.

R.: a) $\pi/18$=0,17[rad/s^2]; b) $4\pi/9$=1,4[rad/s]; c) 1000 vueltas

10) Un ciclista viaja en una bicicleta que tiene ruedas de 1,2[m] de diámetro. Acelera desde el reposo con aceleración constante hasta que alcanza una velocidad de 21,6[km/h] de magnitud en 15,0[s]. Determine: a) la aceleración angular de las ruedas; b) la aceleración tangencial y la aceleración normal de los puntos periféricos de las ruedas cuando han transcurrido 5,0[s] desde que el ciclista partió; c) la aceleración de los puntos periféricos de las ruedas en t=14,0[s].

R.: 2/3[rad/s]; b) 0,40[m/s^2], 6,7[m/s^2]; c) 60 [m/s^2];

11) Halle la velocidad angular de la tierra al girar alrededor de su eje. Determine además, la rapidez lineal de un punto de la superficie terrestre ubicado a 50° de latitud sur

Radio de la tierra = $6{,}4\times10^3$[km]

R.: $\pi/12$=0,26[rad/h]; $1{,}1\times10^3$[km/h]= $3{,}1\times10^2$[m/s]

12) El vector posición de una partícula que se mueve sobre un plano es $\vec{r}=\left(5{,}0\cos\pi t-1\right)\hat{i}+\left(5{,}0\operatorname{sen}\pi t+2\right)\hat{j}\left[m\right]$, donde "t" se mide en [s].

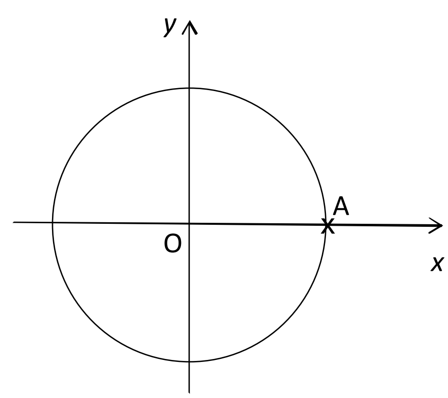
a) Demuestre que el movimiento de la partícula es circular uniforme
b) Halle el radio de la trayectoria circunferencial
c) Halle la frecuencia del movimiento de la partícula.

(Sugerencia: tenga presente que para el MCU las magnitudes de $\vec{v}$ y $\overrightarrow{a_c}$ son constantes no nulas y $\left|\overrightarrow{a_t}\right|=0$)

R.: b) 5,0[m]; c) 0,50[Hz]

13) Una partícula describe una circunferencia de 5,0[m] y aumenta uniforme y constantemente la magnitud de su velocidad. En cierto punto A de su trayectoria la rapidez es 5,0[m/s] y en otro B, transcurridos 3,0[s] es 11,0[m/s]. a) Encuentre el vector aceleración en el punto A y B. Dibújelos, a mano alzada en la figura adjunta. Además, b) escriba el vector posición cuando la partícula pasa por A y también, por B

(Sugerencia: Observe que en el punto A, la aceleración centrípeta coincide con el eje –x y la aceleración tangencial es paralelo al eje –y)



R.: $\overrightarrow{a_A}=\left(-5{,}0\hat{i}+2{,}0\hat{j}\right)\left[m/s^2\right]$; $\overrightarrow{a_B}=\left(-23{,}6\hat{i}-5{,}7\hat{j}\right)\left[m/s^2\right]$; b) $5{,}0\hat{i}[m]$; $\left(4{,}8\hat{i}+1{,}6\hat{j}\right)[m]$

14) Una partícula se mueve en una circunferencia de radio R=2,0[m], de tal modo la magnitud de su aceleración tangencial es siempre igual a la de su velocidad. Inicialmente, t = 0, la magnitud de su velocidad angular es π[rad/s]. En t=1,0[s] determine: a) la aceleración angular de la partícula; b) la aceleración tangencial de la partícula; c) la velocidad angular de la partícula.

(Sugerencia: Tenga presente que $a_t = \dfrac{dv}{dt}$)

R.: a) $\pi e[rad/s^2]$; b) $2\pi e[m/s^2]$; c) $\pi e[rad/s]$

15) Un disco de masa m gira sobre una mesa sin fricción, describiendo una trayectoria circular de radio R. El disco está unido por medio de una cuerda ideal a un objeto de masa M, que cuelga por debajo de la mesa. Esta cuerda pasa por un orificio ubicado en el centro de la mesa. a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas. b) Encuentre la tensión de la cuerda. c) Halle la rapidez con que debe girar el disco, de modo que la masa M permanezca en reposo.

R.: b) Mg; c) $\sqrt{\dfrac{MgR}{m}}$

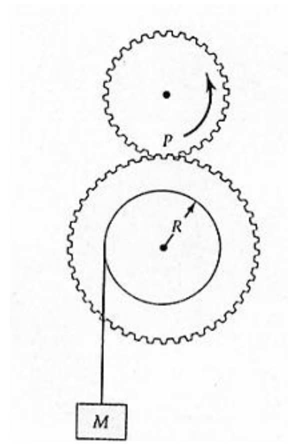
16) En un parque de entretenciones hay un carrusel con 6 caballitos, todos ellos a 2,0 [m] del eje de giro. El carrusel parte del reposo, acelerando uniformemente de modo que al completar la primera vuelta su velocidad angular es de 8,0 [rpm]. Luego mantiene constante esa velocidad durante los siguientes 3 minutos. En seguida el carrusel frena uniformemente de manera que se detiene al completar una vuelta. Determine: a) el número total de vueltas que da el carrusel desde que parte hasta que se detiene; b) la aceleración angular del carrusel mientras acelera en la primera vuelta y mientras frena en la última vuelta; c) el módulo de las aceleraciones tangencial y normal de cada caballito mientras el carrusel mantiene constante su velocidad angular; d) el módulo de las aceleraciones tangencial y normal de cada caballito en el instante en que el carrusel completa la primera media vuelta.

R.: a) 26 [vueltas]; b) 0,056 [rad/s^2] , -0,056 [rad/s^2]; c) $a_T = 0$; $a_N = 1,41$ [m/s^2];
d) $a_T = 0,11$ [m/s^2]; $a_N = 0,70$ [m/s^2]

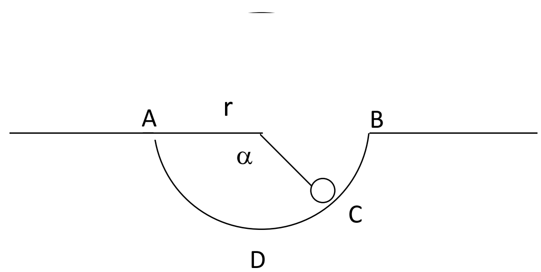
17) Una curva en una carretera tiene un radio de 150 [m] y la señalización indica que la rapidez máxima de los vehículos en esa zona es de 80 [km/h]. a) Si la curva no está peraltada, determine el mínimo coeficiente de roce que debe existir entre los neumáticos y la carretera, de modo que el vehículo describa la curva sin patinar. b) ¿Con qué ángulo de peralte debe ser diseñada la curva para que, aún con roce despreciable, los vehículos puedan describirla sin problema?

R.: a) 0,33 ; b) 18,2°

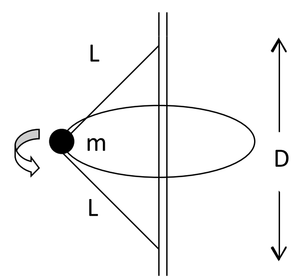
18) Dos ruedas dentadas cuyos radios son R_1 = 5 [cm] y R_2 = 8 [cm] están engranadas como se muestra en la figura. La más pequeña de ellas gira con una velocidad angular constante ω_1 = 2,5 rad/s, en sentido antihorario. Determine:
a) El valor de la velocidad angular y el sentido de giro de la rueda más grande,
b) La velocidad (magnitud y dirección) de la masa M que cuelga del tambor solidario a la rueda dentada más grande. Suponga que el radio del tambor es R = 7 [cm].
c) La tensión de la cuerda si M = 0,5 [kg].
R.: a) 1,56 [rad/s]; b) 0,11 [m/s]; c) 5 [N]



19) Una pequeña bola de masa m, inicialmente en reposo en A, se desliza sobre una superficie circular lisa ADB. Mostrar que cuando la bola se encuentra en el punto C la velocidad angular y la fuerza ejercida por la superficie son $\omega = \sqrt{\dfrac{2g\,\text{sen}\alpha}{r}}$ y $F = 3mg\,\text{sen}\alpha$, respectivamente.



20) Una masa de 4,0 [kg] está sujeta a un poste vertical por medio de dos cuerdas livianas de igual largo (L = 2,0 [m]). La distancia entre los puntos del poste donde se sostienen las cuerdas es D = 3[m]. Se hace girar la masa alrededor del poste con una rapidez constante de 6,0 [m/s] en un plano horizontal. Despreciando los efectos del roce, determine las tensiones en las cuerdas.
R.: 109 [N] y 55,8 [N]



21) Una partícula de masa m se mueve en un círculo horizontal de radio r sobre una mesa rugosa. La partícula está sujeta a una cuerda fija en el centro del círculo. La rapidez de la partícula es inicialmente v_0. Después de recorrer una vuelta completa, la rapidez de la partícula es $v_0/2$. a) Determinar el trabajo realizado por fricción durante una vuelta en función de m, v_0 y r. b) ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético? c) ¿Cuántas vueltas da en total la partícula antes de detenerse?

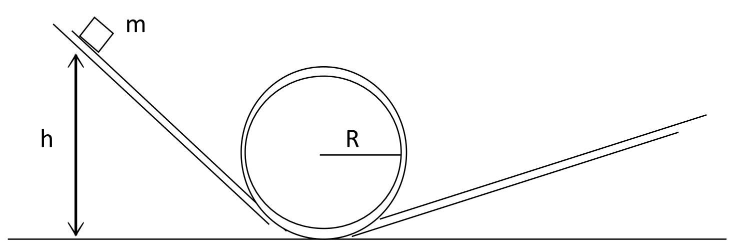
R.: $a) -\frac{3}{8}mv_0^2; b) \frac{3v_0^2}{16\pi gr}; c) \frac{4}{3} vuelta$

22) Una masa m cuelga de una cuerda ideal de largo L. La masa se desplaza de su posición inicial de modo que la cuerda forme un ángulo θ_0 con la vertical y se suelta desde esa posición. Encuentre: a) la aceleración angular de la masa en función del ángulo que forma la cuerda con la vertical, b) la rapidez de la masa en función de ese ángulo, c) la tensión de la cuerda en función del ángulo.

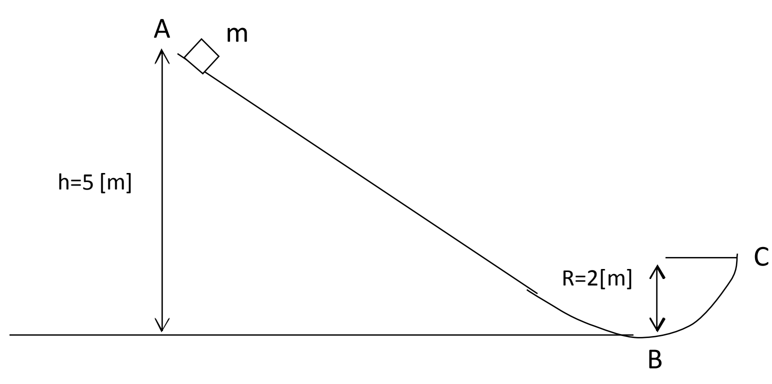
R.: a) $\frac{g sen\,\theta}{L}$; b) $\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$; c) $mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$

23) Una masa pequeña m desliza sin rozamiento a través de una vía en forma de lazo, como indica la figura. El lazo circular tiene un radio R. La masa parte del reposo en un punto P, a una altura h por encima de la parte inferior del lazo. a) ¿Cuál es la energía cinética de m cuando alcanza la parte superior del lazo?; b) ¿Cuál es su aceleración en la parte superior del lazo, admitiendo que no se sale de la vía?; c) ¿Cuál es el menor valor de h si m ha de alcanzar la parte superior del lazo sin salirse de la vía?

R.: $a)mg(h-2R);b)\frac{2g(h-2R)}{R};c)\frac{5}{2}R$



24) Un bloque de masa m = 6 [kg] se libera desde el reposo en el punto A, sobre un riel sin fricción, como muestra la figura. Determine:
a) La rapidez con que el bloque pasa por el punto B.
b) Las componentes normal y tangencial de la aceleración cuando el bloque pasa por B.
c) La fuerza normal ejercida por la pista sobre el objeto cuando éste pasa por B.
d) La altura máxima alcanzada por el objeto, medida desde el suelo, después de salir verticalmente hacia arriba desde C.



R.: a) 10 [m/s] ; b) a_N = 50 [m/ s^2]; a_T = 0 ; c) 360 [N] ; d) 5 [m]

8 Centro de Masa

8.1 Centro de masa

Cuando se examina con detención el movimiento de un sistema de partículas se halla que, aunque experimente traslaciones y giros complicados, hay un punto, llamado centro de masa (CM) del sistema cuyos cambios o evolución permite describir con relativa sencillez lo que sucede globalmente a todo el sistema.

La posición del CM para un conjunto de N partículas está definido por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r_j}}{\sum_{j=1}^{N} m_j} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r_j}}{M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(x_j \hat{i} + y_j \hat{j} + z_j \hat{k} \right)$$

relación que lleva a las coordenadas del centro del CM, las que se expresan como

$$x_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j x_j}{M}, \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j y_j}{M}, \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j z_j}{M}$$

A partir de la definición dada por el CM, se encuentra

$$M\vec{r}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r_j}$$

La que si se deriva respecto del tiempo da

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v_j}$$

Esta última expresión conduce a dos resultados importantes, a saber:

(1) Al derivarla nuevamente respecto del tiempo, se logra

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a_j} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F_j}$$

donde $\sum_{j=1}^{N}\overrightarrow{F_j}$ es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada partícula o la fuerza neta que obra sobre el sistema. Algunas de esas fuerzas son internas (es decir, ejercida por una partícula del sistema sobre otra del mismo sistema) y

otras son fuerzas externas (es decir, ejercida por una partícula ajena al sistema al sistema sobre ajena al sistema sobre una del sistema). Luego

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{\text{int},j} + \sum_{l=1}^{q}\vec{F}_{ext,l}$$

Conforme a la tercera Ley de Newton, para cada fuerza interna que actúa sobre una partícula existe una fuerza igual y opuesta que ejerce ésta sobre otra partícula, constituyéndose pares acción-reacción. Cuando se suman todas las fuerzas internas, cada par suma nulo, de tal modo que

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{\text{int},j} = 0$$

Por tanto

$$\vec{F}_{neta,ext} = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ext,j} = M\vec{a}_{CM}$$

Relación que puede llamarse “segunda Ley de Newton” para un sistema de partículas cuyas masas son constantes. Ello significa que el CM se comporta exactamente igual que una sola partícula, de masa $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$, sometida únicamente a fuerzas externas

(2) Se sabe que $\overrightarrow{p_j} = m_j\overrightarrow{v_j}$. Entonces,

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^{N}\overrightarrow{p_j}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

Lo cual significa que el momentum total del sistema es igual a la masa M del sistema por la velocidad $\vec{v}_{CM}$ del CM.

Al derivar respecto del tiempo y admitiendo que M es constante,

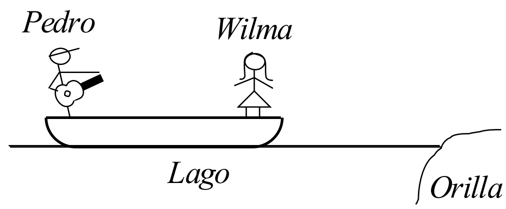
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{neta,ext}$$

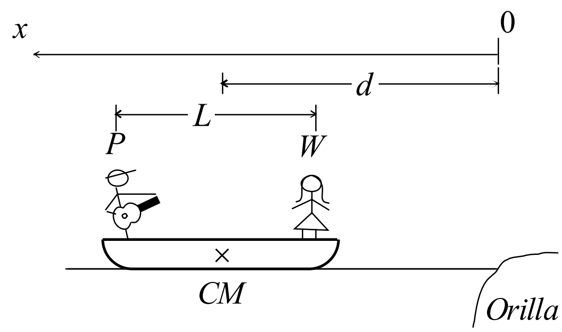
Lo que lleva a aseverar que si la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema es nula, su CM se mueve con velocidad constante.

Ejemplo 8.1 Pedro canta para Wilma, acompañado de su guitarra en la parte trasera de su bote mientras están en “aguas tranquilas” de un lago. Al finalizar el canto, Wilma se traslada suavemente hacia donde está Pedro para besarlo, alejándose de la orilla. El bote de 80[kg], inicialmente apunta hacia el borde del lago y Wilma, de 55[kg], se mueve 2,7[m] hacia Pedro, de 90[kg]. Determine la distancia que se ha movido el bote hacia la orilla.



Solución

Se supone que Pedro está en la “popa” de su bote, en tanto que Wilma está en la “proa” del mismo. También, se admite que el bote tiene una longitud L=2,7[m] y que su centro de masa está en L/2, además “d” es la distancia entre la orilla del lago y el CM del bote, como se muestra en la figura adjunta y que D es la distancia que se ha movido el bote mientras Wilma caminó hacia Pedro.



$M_b = 80[kg]$ $\quad M_W = 55[kg]$

$M_P = 90[kg]$

Entonces, antes que Wilma se desplace, la posición x_{CM} del CM del sistema Wilma-Pedro-bote está dado por

$$x_{CM} = \frac{M_b d + M_W\left(d - L/2\right) + M_P\left(d + L/2\right)}{M_b + M_W + M_P}$$

Después que Wilma se ha desplazado hacia Pedro, la posición final x'_{CM} del CM del sistema está dado por

$$x'_{CM} = \frac{M_b\left(d - D\right) + M_W\left(d + L/2 - D\right) + M_P\left(d + L/2 - D\right)}{M_b + M_W + M_P}$$

Como no hay fuerzas externas actuando sobre el bote en la dirección x, el CM del sistema no se mueve horizontalmente respecto de un sistema inercial como la orilla del lago o las “aguas tranquilas”. Así

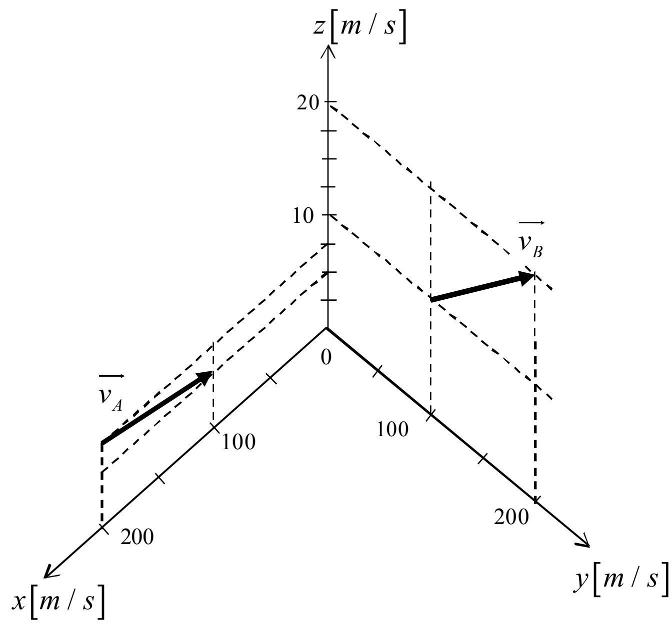
$$x_{CM} = x'_{CM}$$

$$D = \frac{M_W L}{M_b + M_W + M_P}$$

$$D = \frac{55 \cdot 2,7}{80 + 55 + 90}$$

$$D = 0,66[m]$$

Ejemplo 8.2 La figura adjunta muestra las velocidades de dos aviones: A que tiene una masa de 3000[kg] y B, de 4000[kg]. Determine la velocidad del centro de masa de los aviones



Solución

En este caso la velocidad del CM está dado por

$$\vec{v}_{CM} = \frac{M_A\overrightarrow{v_A} + M_B\overrightarrow{v_B}}{M_A + M_B}$$

Con

$$\overrightarrow{v_A} = \left(-100\hat{i} - 2{,}5\hat{k}\right)[m/s]$$

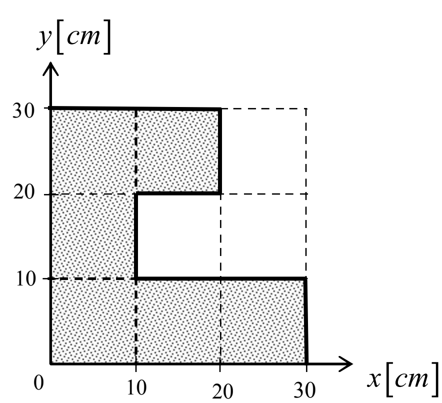
$$\overrightarrow{v_B} = \left(100\hat{j} + 2{,}5\hat{k}\right)[m/s]$$

Entonces

$$\vec{v}_{CM} = \frac{-3{,}0\times10^5\hat{i} - 7{,}5\times10^3\hat{k} + 4{,}0\times10^5\hat{j} + 1{,}0\times10^4\hat{k}}{7000}$$

$$\vec{v}_{CM} = \left(-\frac{3}{7}\times10^2\hat{i} + \frac{4}{7}\times10^2\hat{j} + \frac{5}{14}\times10^2\right)[m/s]$$

Ejemplo 8.3 Una pieza metálica, hecha a partir de una lámina uniforme de acero, tienen la forma mostrada en la figura adjunta. Determine las coordenadas x e y del centro de masa de la pieza



Solución
La pieza puede descomponerse en tres piezas más pequeñas para cada una de las cuales es sencillo hallar las coordenadas de su centro de masa.

El CM de la pieza completa se obtendrá a partir de los valores determinados para cada parte.
En este caso conviene trabajar con la densidad superficial de masa de la lámina de acero (aceptando que la lámina es muy delgada, es decir, su espesor es despreciable), definida operacionalmente con

$$\sigma = \frac{m}{A}$$

La primera pieza, tiene 20[cm] de longitud por 10[cm] de ancho. Su centro de masa CM_1 tiene por coordenadas $x_1=10[cm]$ e $y_1=25[cm]$ y, su masa es $m_1=\sigma 200$

La segunda pieza tiene 10[cm] de largo por 10[cm] de ancho Su centro de masa CM_2 tiene por coordenadas $x_2=5[cm]$ e $y_2=15[cm]$ y, su masa es $m_2=\sigma 100$

La tercera pieza, tiene 30[cm] de longitud por 10[cm] de ancho. Su centro de masa CM_3 tiene por coordenadas $x_3=15[cm]$ e $y_3=5[cm]$ y, su masa es $m_3=\sigma 300$

La coordenada x del CM de la pieza completa se encuentra con

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x = \frac{\sigma 200\cdot 10 + \sigma 100\cdot 5 + \sigma 300\cdot 15}{\sigma 200 + \sigma 100 + \sigma 300}$$

$$x = \frac{7000\sigma}{600\sigma} = \frac{35}{3}[cm] = 11{,}7[cm]$$

La coordenada y del CM de la pieza completa está dada por

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y = \frac{\sigma 200\cdot 25 + \sigma 100\cdot 15 + \sigma 300\cdot 5}{\sigma 200 + \sigma 100 + \sigma 300}$$

$$y = \frac{8000\sigma}{600\sigma} = \frac{40}{3}[cm] = 13{,}3[cm]$$

En consecuencia, el CM de la pieza está en el punto $C\left(\frac{35}{3};\frac{40}{3}\right)[cm]$

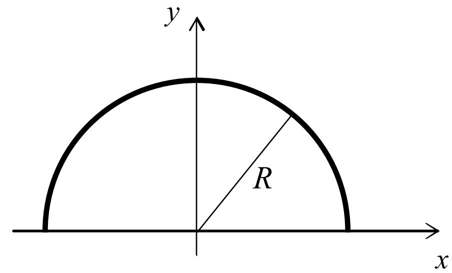
Una observación no menor lo constituye el hecho que en el punto C no hay material de la pieza.

8.2 CM para objetos Continuos

Para determinar el CM de un objeto continuo (o sea, un objeto que tiene su masa distribuida, como por ejemplo: una varilla, una lámina, un rodamiento, etc.) se puede suponer que el objeto está constituido por "partículas infinitesimales" o "elemento de masa" "dm" cuya posición es $\vec{r}$, así para determinar el CM se emplea

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm$$

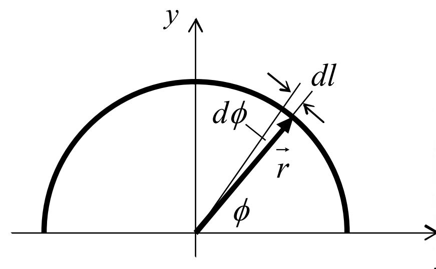
Ejemplo 8.4 Determine el centro de masa un anillo semicircular de radio R y masa M distribuida uniformemente, que se muestra en la figura.



Solución

Al suponer que el semianillo está formado de muchas "partículas infinitesimales" dm, el centro de masa está dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm$$



La posición de cada elemento de masa está dado por

$$\vec{r} = R\left(\cos\phi\hat{i} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{j}\right)$$

Puesto que la masa del semianillo está uniformemente distribuida, la densidad lineal de masa λ (masa por unidad de longitud) es constante, así

$$\lambda = \frac{M}{L_{Total}} = \frac{dm}{dl}$$

Y la masa de cada elemento puede escribirse en términos de λ como

$$dm = \lambda dl$$

con

$$dl = Rd\phi$$

por tanto

$$dm = \lambda Rd\phi$$

Al reemplazar $\vec{r}$ y dm en la relación del centro de masa y considerando que se deben sumar todos los elementos de masa entre 0 y π, se tiene

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} R\left(\cos\phi\hat{i} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{j}\right)\lambda Rd\phi$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\lambda R^2}{M}\left(\int_0^{\pi}\cos\phi d\phi\hat{i} + \int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi d\phi\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\lambda R^2}{M}\left(\operatorname{sen}\phi\Big|_0^{\pi}\,\hat{i} - \cos\phi\Big|_0^{\pi}\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\lambda R^2}{M}\left(0\hat{i} + 2\hat{j}\right)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2\lambda R^2}{M}\hat{j}$$

como λ es constante y el largo del semianillo es πR

$$\lambda = \frac{M}{L_{Total}} = \frac{M}{\pi R}$$

Finalmente

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}$$

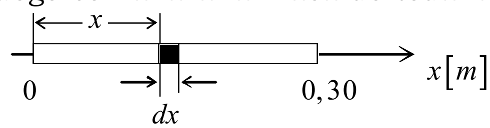
Ejemplo 8.5 Una barra de 30,0[cm] de largo tiene una densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud) dada por

$$\lambda = 50,0 + 20,0x$$

con x medido en [m] y λ en [g/m]
Determine: a) la masa de la barra; b) la abscisa del CM de la barra.

Solución

a) La masa de la barra varía a medida que se recorre de un extremo a otro. De hecho la densidad también lo hace, al evaluar en extremo izquierdo de la barra de la figura $\lambda(0) = 50[g/m]$ y en el extremo derecho $\lambda(0,30) = 56[g/m]$. Entonces para encontrar la masa de la barra se va trabajar con un "elemento de masa" o un "trozo diferencial" de la barra y luego se hallará la masa de toda la barra por integración.
En la figura la longitud diferencial dx de la barra, tiene una masa diferencial dm de modo que



$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$
$$dm = \lambda dx$$
$$dm = (50,0 + 20,0x)dx$$
$$m = \int_0^{0,30} (50,0 + 20,0x)dx$$
$$m = \int_0^{0,30} 50,0dx + \int_0^{0,30} 20,0xdx$$
$$m = 50,0x\Big|_0^{0,30} + 20,0 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,30}$$
$$m = 15,9[g]$$

b) Como se trata de una varilla rectilínea (no doblada) la posición del centro de masa debe ser función exclusiva de la abscisa. Por tanto,

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{0,30} xdm \text{, con M=m=15,9[g]}$$
$$x_{CM} = \frac{1}{15,9}\int_0^{0,30} x\lambda dx$$
$$x_{CM} = \frac{1}{15,9}\int_0^{0,30} x(50,0 + 20,0x)dx$$
$$x_{CM} = \frac{1}{15,9}\left(\int_0^{0,30} 50,0xdx + \int_0^{0,30} 20,0x^2dx\right)$$
$$x_{CM} = \frac{1}{15,9}\left(50,0 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,30} + 20,0 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,30}\right)$$
$$x_{CM} = 0,153[m] = 15,3[cm]$$

Ejemplo 8.6 Demuestre que la energía cinética de un sistema de partículas puede escribirse como la suma de dos términos: (1) energía cinética del centro de masa del conjunto de partículas, $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$; (2) la energía cinética de las partículas del sistema respecto al centro de masa, $\sum \frac{1}{2}m_i u_i^2$, donde $\vec{u}_i$ es la velocidad de la i-ésima partícula relativa al centro de masa.

<u>Solución</u>
La energía cinética del sistema corresponde a la suma de las energías cinéticas de todas las partículas constituyentes de aquél. Por tanto,

$$K = \sum_i K_i$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i \bullet \vec{v}_1\right)$$

Si se define

$\vec{v}_i$: velocidad de la i-ésima partícula respecto a la Tierra (considerada ésta como sistema de referencia inercial)

$\vec{v}_{CM}$: velocidad del CM del sistema de partículas respecto a la tierra

$\vec{u}_i$: velocidad de la i-ésima partícula respecto al CM del sistema

entonces se puede anotar

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_i$$

Al sustituir esta relación para $\vec{v}_i$ en la última expresión para K, se halla

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i\right) \bullet \left(\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i\right)$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(u_i^2 + v_{CM}^2 + 2\vec{u}_i \bullet \vec{v}_{CM}\right)$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \left(\vec{u}_i \bullet \vec{v}_{CM}\right)$$

Como

$$\sum_i m_i \vec{u}_i = M\vec{u}_{CM}$$

Se encuentra que

$$M\vec{u}_{CM} \bullet \vec{v}_{CM} = 0$$

Dado que la velocidad $\vec{u}_{CM}$ del centro de masa respecto al CM es cero
Finalmente se encuentra

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_i m_i$$

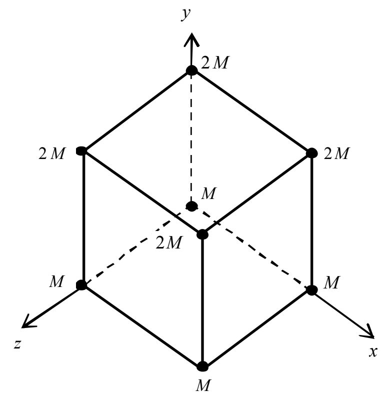
$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

El término $\frac{1}{2} m_i u_i^2$ se puede denominar energía cinética relativa al centro de masa.

Ejercicios propuestos

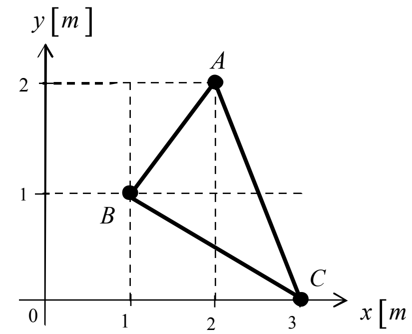
01) Cuatro partículas, cada una de masa M se colocan en los cuatro vértices de la base de un cubo de arista c. En los vértices de la cara superior se colocan otras cuatro partículas, cada una de masa 2M. Determine las coordenadas del CM del sistema.

R.: $\left(\frac{c}{2};\frac{2c}{3};\frac{c}{2}\right)$



02) El sistema ilustrado en la figura adjunta está constituido por tres esferas conectadas entre sí por barras rígidas de masa despreciable. Una fuerza $\vec{F}=12\hat{i}[N]$ se aplica en la esfera A. Determine: a) el vector posición del centro de masa; b) la aceleración (vector) del CM.

R.: a) $\left(2,0\hat{i}+1,4\hat{j}\right)[m]$; b) $2,4\hat{i}\left[m/s^2\right]$

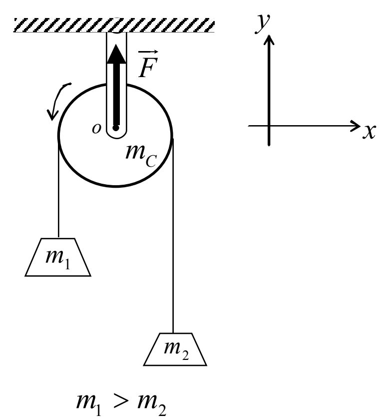


03) En la máquina de Atwood de la figura, la cuerda pasa por un cilindro, sin rozamiento, de masa mc. Determine: a) la aceleración del centro de masa del sistema formado por los dos bloques y el cilindro; b) la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el soporte; c) la tensión de la cuerda que conecta los bloques y demuestre que

$F=m_c g+2T$

(Desprecie la rotación del cilindro en torno a O)

R.: a) $-\frac{\left(m_1-m_2\right)^2 g}{\left(m_1+m_2+m_c\right)\left(m_1+m_2\right)}\hat{j}$; b) $\left[\frac{4m_1m_2}{\left(m_1+m_2\right)}+m_c\right]g\hat{j}$

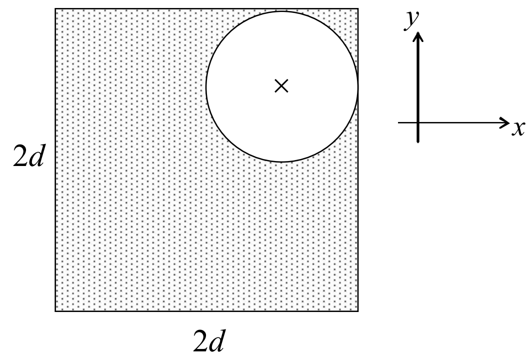


04) Una partícula de 2,0[kg] se mueve con una velocidad $\vec{v_1}=\left(2,0\hat{i}-10t\hat{j}\right)[m/s]$, donde t se mide en segundos. Otra partícula de 3,0[kg] se mueve con una velocidad constante $\vec{v_2}=4,0\hat{i}[m/s]$. Para t=0,50[s] encuentre: a) la velocidad del centro de masa; b) la aceleración del CM; c) el momento total del sistema. Además, halle el vector posición del centro de masa en t=2,0[s] si $\vec{r_1}=\left(-2,0\left(1+t\right)\hat{i}+\left(1-5t^2\right)\hat{j}\right)[m]$ y $\vec{r_2}=\left(2\left(-1+2t\right)\hat{i}-6\hat{j}\right)[m]$.

R.: a) $\left(3,2\hat{i}-2,0\hat{j}\right)[m/s]$; b) $-4,0\hat{j}\left[m/s^2\right]$; c) $\left(16\hat{i}-20t\hat{j}\right)[kg\cdot m/s]$

05) En una placa uniforme y cuadrada, de lado 2d, se practica un orificio circular de diámetro d. Determine las coordenadas del centro de masa de la placa cuadrada monohorada.
(Sugerencia: Parece plausible que al orificio se asigne una masa $-\sigma A$ cuando se desea determinar x_{CM} e y_{CM} ¿por qué?

R.: a) $(0,88d;0,88d)$

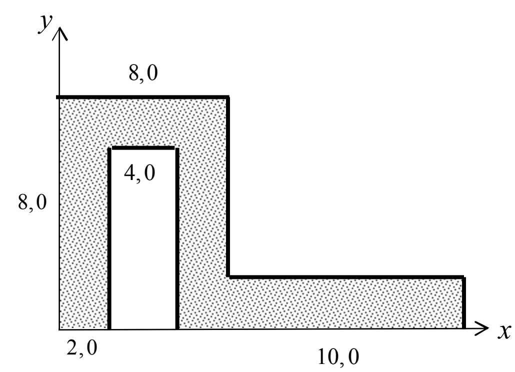


06) Patricio (80[kg]) y Daniel (120[kg]) están sentados en un bote (60[kg]), uno en la proa y otro en la popa, respectivamente, separados una distancia de 2,0[m]. El bote está en reposo y flota en "aguas tranquilas". Halle la distancia que se mueve la embarcación cuando Patricio se ubica en la posición de Daniel y éste se ubica en la posición de patricio.

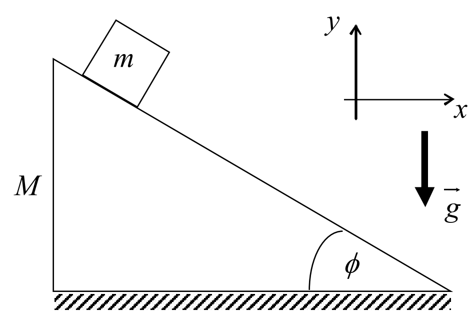
R.: $0,308[m]$

07) Determine las coordenadas del centro de masa de la lámina uniforme de la figura, si sus longitudes están expresadas en centímetros.

R.: $(6,3;3,6)[cm]$

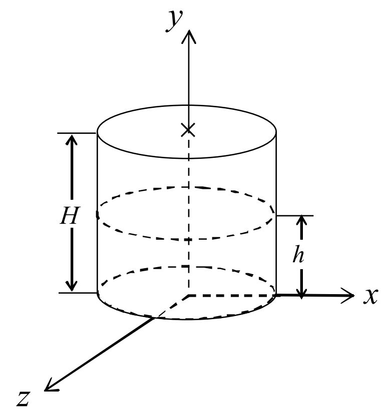


08) Una cuña de masa M está en reposo sobre una plancha horizontal. Una caja pequeña, de masa m, desliza por el plano inclinado y liso. Determine: a) la magnitud de la fuerza normal que ejerce la plancha sobre la cuña mientras la caja desciende resbalando; b) intuitivamente, los valores que toma la magnitud de la fuerza normal que ejerce la plancha sobre la cuña cuando f=0° y f=90°; c) la magnitud de la fuerza $\overrightarrow{F_h} = F_x\hat{i}$ ejercida por la plancha sobre la cuña.



R.: a) $(m\cos^2\phi + M)g$; b) $(m+M)g$, Mg ; c) $mg\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi$

09) Un recipiente cilíndrico de altura H=30,0[cm] y masa M=0,2[kg], se llena totalmente con 1,0[kg] de cierto líquido, de modo que en esta situación el centro de masa se sitúa en el centro del centro del cilindro. Conforme se vacía el recipiente el centro de masa del conjunto se desplaza hacia abajo y una vez vacío vuelve a la mitad de la altura del cilindro. Determine la altura h que alcanza el líquido para que el centro de masa del conjunto se encuentre en el punto más bajo.
(Sugerencia: admita que el área basal del cilindro es A y la densidad del líquido es r. Con ello, encuentre una relación entre la masa del líquido cuando llena el recipiente y la masa del mismo cuando alcanza una altura h)



R.: $8,7\left[cm\right]$

9 Dinámica de Rotación

9.1 Sólido rígido

Un cuerpo rígido se caracteriza por que la separación o la distancia entre partículas que la componen permanece constante.

Todas las partículas de un objeto rígido se mueven con la misma rapidez angular y con la misma aceleración angular.

En primer lugar, es conveniente referirse a un "movimiento rotacional puro", lo que quiere decir que se trata de un movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.

9.2 Energía rotacional

La energía cinética de rotación de un conjunto de partículas está dada por

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

donde I es el momento de inercia o inercia rotacional, definido por

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

La masa de la i-ésima partícula es m_i y su distancia al eje de rotación es r_i.

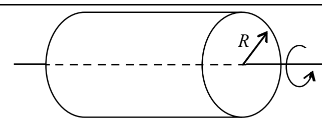
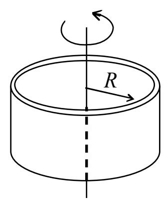
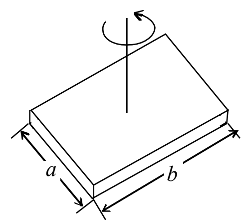
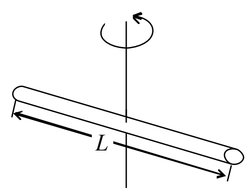
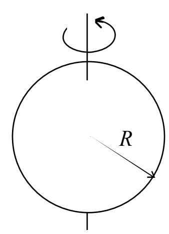
La energía rotacional se mide en [*J*] cuando la masa se mide en [*kg*] y el momento de inercia en [$kg \cdot m^2$]

Para un sólido rígido la relación para la energía rotacional K es la misma indicada anteriormente y el momento de inercia se halla a partir de

$$I = \int_a^b r_i^2 dm$$

y *dm* suele determinarse a partir de la densidad del objeto sólido. Por lo general los momentos de inercia para los sólidos ya están tabulados respecto de un eje que pasa por su centro de masa (CM)

Tabla 1 Momentos de inercia de algunos sólidos rígidos homogeneos, respecto a un eje que pasa por sus centros de masa (CM)

Objeto sólido	***Esquema***	***Expresión***
Cilindro y disco macizos		$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$
Anillos y cascarón cilíndrico		$I_{CM} = MR^2$
Placa rectangular		$I_{CM} = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$
Varilla o barra larga delgada		$I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$
Esfera maciza		$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

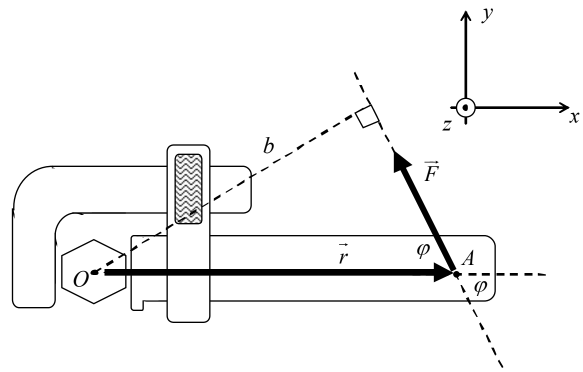
Cuando se conoce el momento de inercia de un sólido respecto de un eje que pasa por su CM (I_{CM}), se puede determinar su momento de inercia I0 respecto de un eje que pasa por un punto O, que es paralelo al eje anterior y que están separados una distancia d, mediante

$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

expresión que se conoce como teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos.

9.3 Momento de una fuerza o torque $\left(\vec{\tau}\right)$

En la figura adjunta, $\overrightarrow{F}$ es una fuerza que actúa sobre un sólido rígido que puede rotar o que tiene la tendencia a rotar en torno a un eje que pasa por O y que es paralelo eje z. la posición del punto A de aplicación de la fuerza $\overrightarrow{F}$ está determinado por $\vec{r}$. El torque respecto de O está definido por



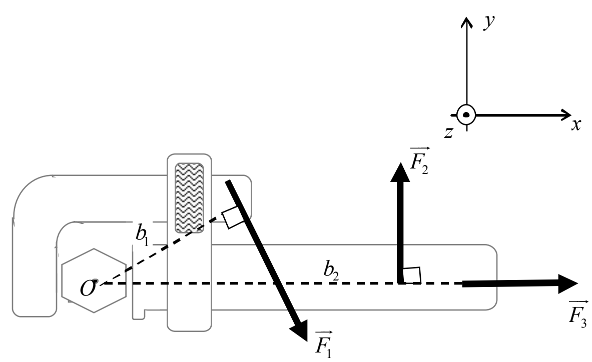
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \overrightarrow{F}$$

o

$$\tau = r \cdot F \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$\tau = b \cdot F$$

El factor b se denomina brazo de la fuerza o brazo palanca.
Cuando hay dos o más fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, cada una de ellas produce un torque y tienden a hacerlo rotar en un sentido u otro. En la situación mostrada, $\overrightarrow{F_1}$ tiende a hacer girar al sólido en el sentido de las agujas del reloj (+z), $\overrightarrow{F_2}$, en el sentido contrario a las agujas del reloj (-z) y $\overrightarrow{F_3}$, no tiende a hacerlo girar. Luego,



$$\sum \tau_o = \tau_2 - \tau_1$$

$$\sum \tau_o = b_2 F_2 - b_1 F_1$$

9.4 Momento de fuerza y acelereación angular

El torque neto que actúa sobre un sólido rígido que puede girar en torno a un eje fijo es proporcional a su aceleración angular según la expresión

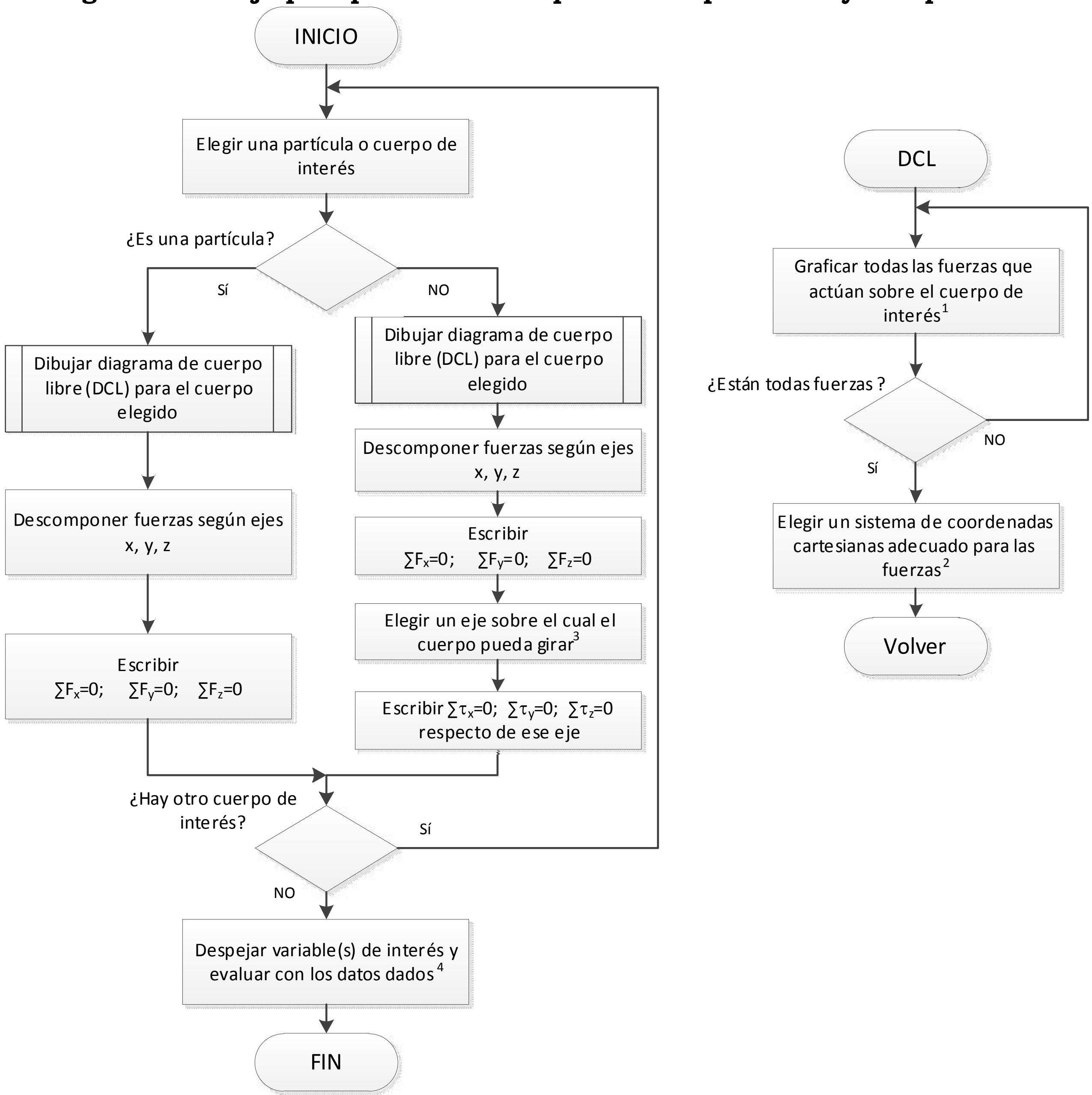
$$\sum \tau_o = I_o \cdot \alpha$$

la que bien puede considerarse como "la segunda ley de Newton" en la rotación.
Cuando un sólido gira con rapidez angular constante e incluso nula, es decir, cuando el objeto está en equilibrio de rotación, entonces

$$\sum \tau_o = 0$$

Esta última expresión se suele denominar "segunda condición de equilibrio."

9.4.1 Diagrama de Flujo para problemas de equilibrio de partículas y cuerpos



[1] Por lo general, cuando se trate de cuerpos que pueden rotar, es recomendable representar las fuerzas en el lugar donde son aplicadas sobre el cuerpo.

[2] Elegir el sistema de coordenadas de modo que la mayoría de los vectores coincidan con uno de los semiejes.

[3]. Se suele elegir un eje por el cual pase una fuerza desconocida, de modo que no aparezca en la ecuación de torque.

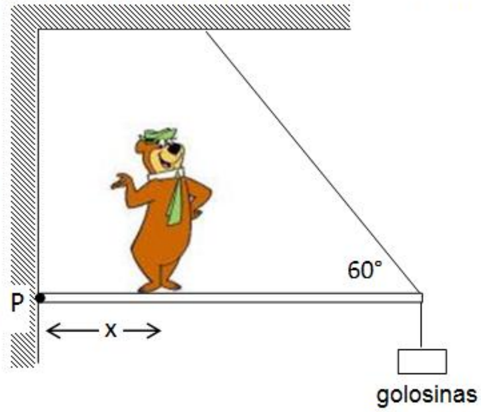
[4] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

Ejemplo 9.1 Un oso hambriento de 700 N camina sobre una viga para alcanzar unas golosinas que se encuentran colgando al final de ésta. La viga pesa 200 [N] y tiene 6,0 [m] de largo. Las golosinas pesan 80 [N].

a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre para la viga.

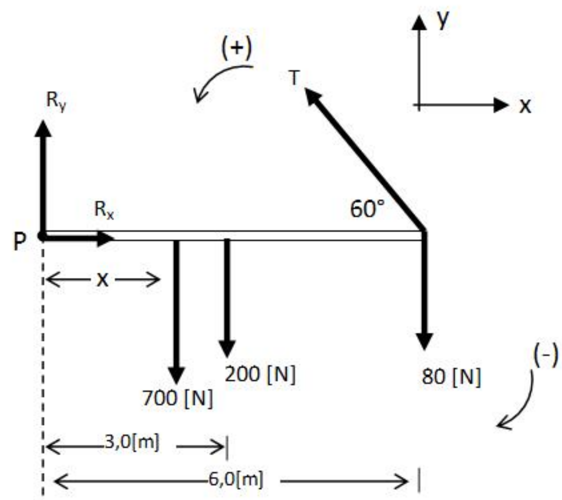
b) Encuentre la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza de reacción en el pivote P cuando el oso se encuentra a x = 1,0 [m].

c) Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900 [N], ¿cuál es la máxima distancia que puede caminar el oso sobre la viga antes de que el alambre se rompa?



Solución

a) La figura adjunta muestra el diagrama de cuerpo libre para la viga.



b) Dado que el sistema se encuentra en equilibrio de traslación y de rotación, entonces la suma de las fuerzas y la suma de torques es cero.
Luego, si se considera la suma de torques respecto del pivote P y teniendo presente los signos mostrados en la figura adjunta, se tiene que

$$\sum \tau_P: \quad T \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60° - 80 \cdot 6 - 200 \cdot 3 - 700 \cdot 1 = 0$$

$$T = 342,6[N]$$

Además,

$$\Sigma F_x : H - T\cos 60° = 0$$

$$H = 342,6 \cdot \cos 60°$$

$$H = 171,3[N]$$

$$\Sigma F_y : T \operatorname{sen} 60° + V = 700 + 200 + 80$$

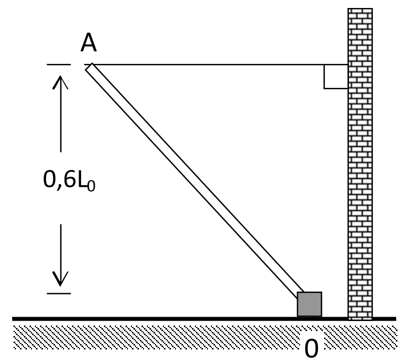
$$V = 683,3[N]$$

c) La relación para la suma de torques respecto de P permite determinar el valor dela distancia "x" pedida. En efecto, considerando que T = 900 [N], se tiene

$$900 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60° - 80 \cdot 6 - 200 \cdot 3 - 700x = 0$$

$$x = 5,14[m]$$

Ejemplo 9.2 La figura muestra un sistema en equilibrio. La barra es homogénea de largo L_0 y masa M_0. Está sujeta por una cuña en el punto 0 y por una cuerda inextensible y de masa despreciable en el punto A. Si en el piso no hay fricción, calcule:



a) La tensión de la cuerda.

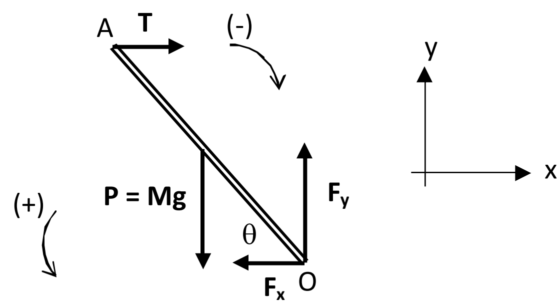
b) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce la cuña sobre la barra.

c) El módulo de la fuerza calculada en b) y el ángulo que forma la fuerza con el piso.

Exprese sus respuestas en función de M_0 y g.

Solución

La figura adjunta muestra el diagrama de cuerpo libre o diagrama de fuerzas de la barra homogénea.



Como el sistema está en equilibrio, la suma de torques respecto de O es nulo.

$$\Sigma\tau_O: \quad -T\cdot 0{,}6L_0 + M_0 g\frac{L_0}{2}\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

Para hallar el valor del ángulo θ, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0{,}6L_0}{L_0} = 0{,}6$$

Es decir, $\theta = 37°$. Al reemplazar este valor en (1) y al reordenar los términos,

$$T\cdot 0{,}6 = \frac{1}{2}M_0 g\cos 37°$$

$$T = \frac{2}{3}M_0 g$$

Como el sistema también está en equilibrio de traslación, se cumple que la suma de fuerzas es nula.

$\Sigma F_x: \quad T - F_x = 0$

$\Sigma F_y: \quad F_y - P = 0$

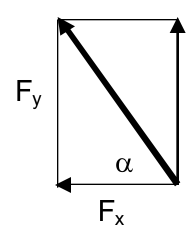
Luego,

$$F_x = T = \frac{2}{3}M_0 g$$

y

$$F_y = P = M_0 g$$

Para determinar el módulo o magnitud de la fuerza que ejerce la cuña sobre la barra, basta considerar que



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\frac{4}{9}M_0^2 g^2 + M_0^2 g^2}$$

$$F = 1{,}2\cdot M_0 g$$

El ángulo que forma la fuerza **F** con el piso está dado por

$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{M_0 g}{\frac{2}{3}M_0 g} = \frac{3}{2}$$

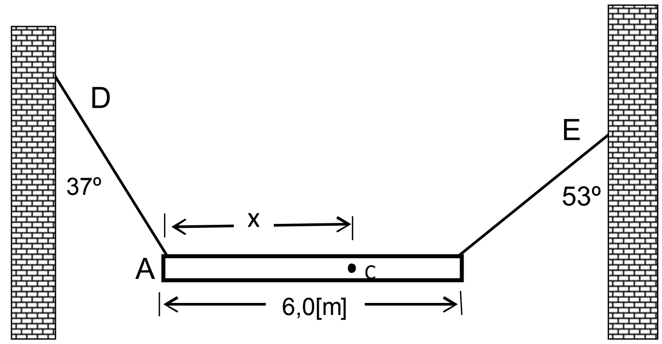
$$\alpha = 56{,}3°$$

Ejemplo 9.3 Una barra no homogénea, de peso 100[N] y de longitud 6,0[m], está suspendida en forma horizontal, mediante dos cuerdas livianas e inextensibles como se muestra en la figura.

a) Haga el diagrama de cuerpo libre de la barra.

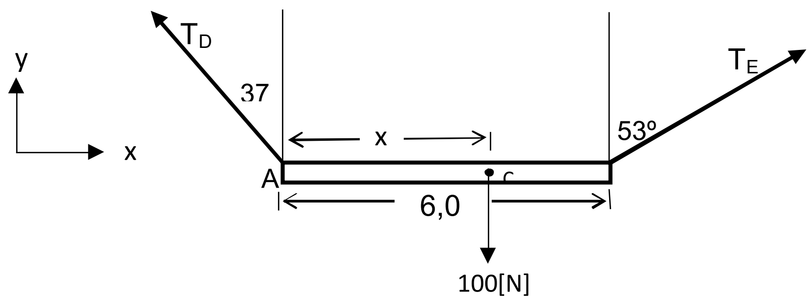
b) Encuentre la tensión en cada una de las cuerdas D y E.

c) Encuentre la distancia "x", medida desde A, a la que se ubica el centro de gravedad C de la barra (o sea, el punto donde "se concentra" el peso de la barra).



Solución

a)



b) La figura muestra el diagrama de cuerpo libre para la barra no homogénea. A partir de la primera condición de equilibrio se tiene que $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Luego,

Eje x: $T_D \operatorname{sen} 37^o = T_E \operatorname{sen} 53^o$ (1)

Eje y: $T_D \cos 37^o + T_E \cos 53^o = 100$ (2)

La segunda condición de equilibrio establece que $\Sigma \tau_O = 0$. En el presente caso, la sumatoria de torques se toma respecto del punto A de la barra. Luego,

$\Sigma \tau_A$: $-100x + T_E \cdot L \cos 53° = 0$ (3)

Al dividir miembro a miembro (1) por (3), se obtiene

$$tg37^o = \frac{T_E \operatorname{sen} 53^o}{-T_E \cos 53^o + 100}$$

$$100 \cdot tg37^o = T_E(\operatorname{sen} 53^o + tg37^o \cdot \cos 53^o)$$

$$T_E = \frac{100tg37^o}{\operatorname{sen} 53 + tg37^o \cdot \cos 53^o}$$

$$T_E = 60,2[N]$$

Al reemplazar en (1) el valor hallado para T_E, se encuentra que

$$T_D = \frac{60,2 \cdot \operatorname{sen} 53^o}{\operatorname{sen} 37^o}$$

$$T_D = 79,9[N]$$

c) Al reemplazar en (3) el valor hallado para T_E y despejando x, se encuentra que

$$x = \frac{T_E L \cos 53^o}{100}$$

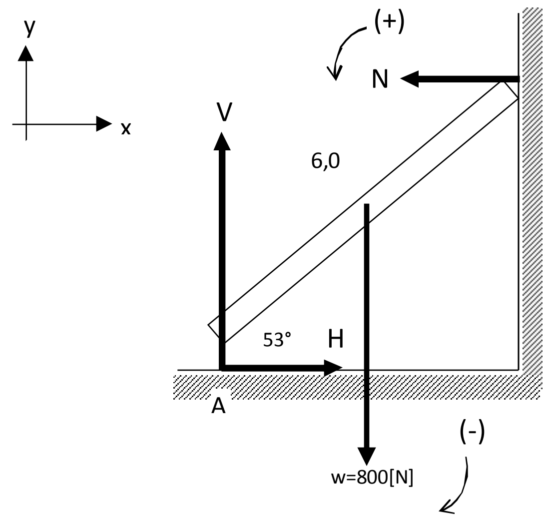
$$x = \frac{60,2 \cdot 6,0 \cdot \cos 53^o}{100}$$

$$x = 2,2[m]$$

Ejemplo 9.4 Una escalera de 6,0 [m] de longitud, que pesa 800 [N] y que es homogénea (o sea, tiene su centro de gravedad en el punto medio), está en equilibrio. La escalera está apoyada en una pared vertical y forma un ángulo de 53° con el suelo. Determine la magnitud y dirección de las fuerzas de reacción que ejercen el piso y la pared sobre la escalera.

Solución

La figura adjunta muestra el diagrama de cuerpo libre de la escalera. Las fuerzas. Como la pared es lisa, la fuerza N es horizontal. La dirección de la fuerza que ejerce el piso sobre la escalera en el punto A se desconoce y es por ello que esa fuerza se ha descompuesto en sus componentes rectangulares H y V.



La Primera Condición de Equilibrio permite escribir

$$\Sigma F_x : \quad H - N = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y : \quad V - 800 = 0 \qquad (2)$$

De (2) se concluye que $V = 800\,[N]$.

La Segunda Condición de Equilibrio, respecto de A, permite encontrar la magnitud de N.

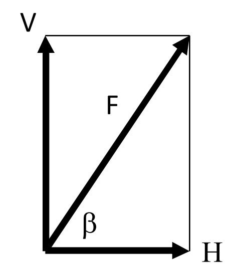
El punto A es conveniente, pues las fuerza desconocidas H y V tienen torque nulo respecto a este punto. Luego,

$$\Sigma\tau_A : \quad N \cdot 6{,}0 \cdot \mathrm{sen}\,53^\circ - 800 \cdot 0{,}5 \cdot 6{,}0 \cdot \cos 53^\circ = 0$$

$$N = 301[N]$$

Luego, de (1) se halla que

$$H = 301[N]$$



La fuerza de reacción **F** que ejerce el piso sobre la escalera tiene una magnitud

$$F = \sqrt{301^2 + 800^2} = 855[N]$$

y su dirección, respecto del piso es

$$\beta = tg^{-1}\left(800/301\right) = 69{,}4^\circ$$

Este último resultado muestra que la dirección de la fuerza **F** no coincide con la dirección de la escalera.

9.5 Trabajo neto, energía y potencia

El trabajo neto realizado por las fuerzas externas que actúan sobre un sólido rígido que rota alrededor de un eje fijo es igual a la variación en la energía cinética de rotación, conforme a la expresión

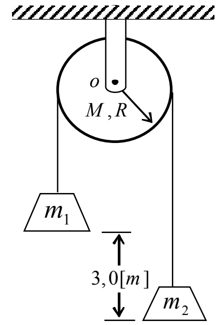
$$W_{neto} = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

$$W_{neto} = \Delta K_{rot}$$

La potencia entregada por un agente externo que aplica una fuerza sobre un sólido que puede girar en torno a un eje fijo es

$$P = \tau \cdot \omega$$

Ejemplo 9.5 Por una polea de masa $M=3,0$[kg] y radio $R=10,0$[m], pasa una cuerda ideal, de cuyos extremos penden sendas pesas de masas $m_1=15,0$[kg] y $m_2=10,0$[kg]. Cuando las masas están separadas 3,0[m] comienzan a moverse. Si la polea se considera como un disco uniforme, determine la rapidez de las dos masas cuando se cruzan, suponiendo que solo hay roce entre la cuerda y la polea.



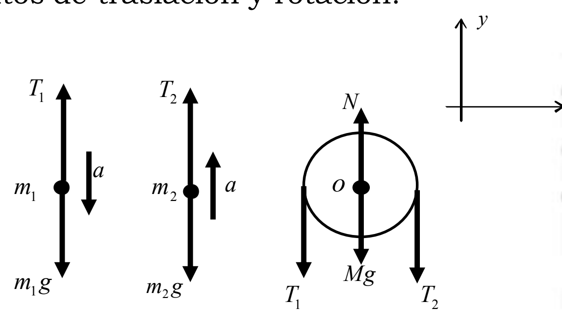
Solución

a) Primer método

Este problema puede resolverse usando relaciones para la fuerza neta y para el torque neto, es decir, para los movimientos de traslación y rotación. En el primer caso, se tiene

$$-m_1 g + T_1 = -m_1 a$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$



de modo que

$$T_1 = m_1 g - m_1 a \qquad (1)$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 a \qquad (2)$$

Para el caso de la rotación de la polea,

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha \ , \qquad \text{con} \ \ I = \frac{MR^2}{2} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$(T_1 - T_2)R = \frac{MR^2}{2}\cdot\frac{a}{R}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{Ma}{2} \qquad (3)$$

Al reemplazar (1) y (2) en (3), se obtiene

$$m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a = \frac{Ma}{2}$$

$$(m_1 - m_2)g = \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2\right)a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2\right)} \qquad (4)$$

Dado que

$$2ad = v^2 - v_0^2 \ , \quad \text{con} \ \ v_0 = 0$$

Se halla que

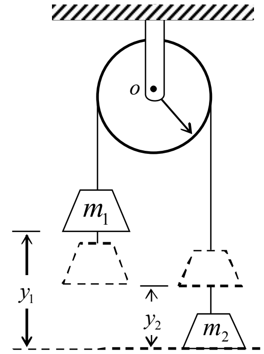
$$v = \sqrt{2ad}$$

$$v = \sqrt{2\cdot\frac{(m_1 - m_2)g}{\left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2\right)}\cdot d}$$

$$v = \sqrt{2\cdot\frac{(15,0-10,0)9,8}{(1,5+10,0+15,0)}\cdot 1,5}$$

$$v = 2,4[m/s]$$

b) Segundo método



$$y_i = y_1 = 3,0[m]$$
$$y_f = y_2 = 1,5[m]$$

Como en esta situación problemática se puede despreciar el la presencia de fricción, entonces se conserva la energía mecánica del sistema. Inicialmente, sólo se cuenta con la energía potencial de m_1, y de la polea, si se toma como referencia la posición de m_2. Finalmente, se tiene las energías potenciales de m_1 y m_2 y de la polea y las energías cinéticas de traslación de m_1 y de m_2 y la de rotación de la polea. Como está última sólo tiene una rotación pura sus energías potenciales gravitacionales son las mismas al inicio y al final, de modo que se cancelan. En consecuencia, la conservación de la energía conduce a la expresión siguiente

$$m_1 y_1 g = (m_1 + m_2) y_2 g + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$2\left[m_1 y_1 - (m_1 + m_2) y_2\right] g = (m_1 + m_2) v^2 + \frac{MR^2}{2}\frac{v^2}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left[m_1 y_1 - (m_1 + m_2) y_2\right] g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}}$$

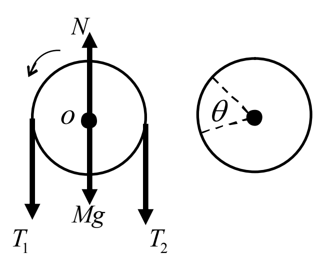
$$v = \sqrt{\frac{2\left[15,0 \cdot 3,0 - (15,0 + 10,0) 1,5\right] 9,8}{10,0 + 15,0 + 1,5}}$$

$$v = 2,4[m/s]$$

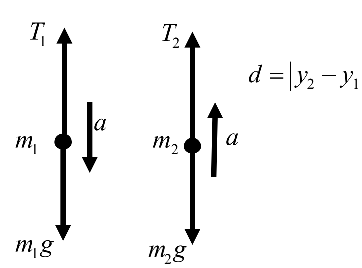
c) Tercer método

El teorema del trabajo y la energía establece que

$$W_{neto} = \Delta K \qquad (1)$$



En este caso el W_{neto} tiene dos términos: el primero referido a la rotación de la polea y el segundo comprende la traslación de las masas m_1 y m_2 debido a las tensiones y el peso. A su vez, la energía cinética también posee dos términos que dicen relación con la rotación de la polea y las traslaciones de las masas. Por tanto,



$$W_{neto} = W_{rot} + W_{trasl}$$

$$W_{rot} = (T_1 - T_2) R\theta = (T_1 - T_2) d \qquad (2)$$

$$W_{trasl} = W_{T_1} + W_{T_2} + W_{m_1 g} + W_{m_2 g}$$

$$W_{trasl} = -T_1 d + T_2 d + m_1 g y_1 - m_1 g y_2 - m_2 g y_2 \qquad (3)$$

En cuanto a la energía cinética del sistema,

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2\right)v^2 \qquad (4)$$

Al reemplazar (2), (3), (4) en (1), se obtiene

$$(T_1 - T_2)d - T_1 d + T_2 d + m_1 g(y_1 - y_2) - m_2 g y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2\right)v^2$$

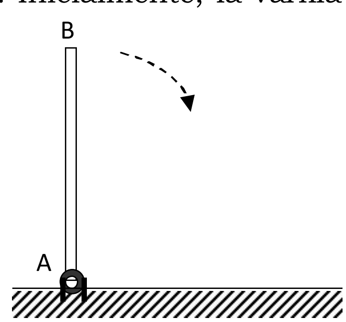
$$2g\left[m_1(y_1 - y_2) - m_2 y_2\right] = \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\left[m_1(y_1 - y_2) - m_2 y_2\right]}{\frac{M}{2} + m_1 + m_2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\left[15{,}0(3{,}0 - 1{,}5) - 10{,}0\cdot 1{,}5\right]}{1{,}5 + 15{,}0 + 10{,}0}}$$

$$v = 2{,}4[m/s]$$

Ejemplo 9.6 Una varilla delgada, de masa M = 6,4 [kg] y de longitud L = 1,2 [m] , está articulada en su extremo inferior mediante un pasador liso A. Inicialmente, la varilla está en posición vertical y comienza a girar hacia el piso.

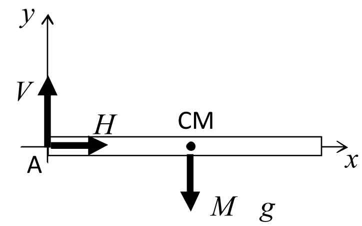


Determine:

a) El momento de inercia de la varilla respecto del punto A.
b) La energía mecánica total inicial de la varilla.
c) La rapidez angular de la varilla cuando llega al piso y la rapidez lineal del extremo libre B de la varilla en el mismo punto.
d) La magnitud de su aceleración angular.
e) La aceleración de su centro de masa, en términos de sus componentes horizontal y vertical.
f) La fuerza que ejerce el pasador sobre la barra.

Solución

Sobre la varilla actúan dos fuerzas: el peso $M\boldsymbol{g}$ y la fuerza que ejerce el pasador, la que se puede descomponer en una componente horizontal $\vec{H}$ y en otra vertical $\vec{V}$. En esta situación problemática sólo trabaja el peso, de modo que se conserva la energía mecánica. Así,



a) El momento de inercia de la varilla respecto del punto A se determina con la ayuda del Teorema de Steiner. Entonces,

$$I_A = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{4ML^2}{12}$$

$$I_A = \frac{ML^2}{3}$$

b) La energía mecánica total inicial es sólo potencial. Luego,

$$E_i = Mg\frac{L}{2}$$

$$E_i = 6,4 \cdot 10 \cdot 0,6$$

$$E_i = 38,4[J]$$

c) Como la energía mecánica total se conserva, entonces

$$E_i = E_f$$

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{ML^2\omega^2}{3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 10}{1,2}}$$

$$\omega = 5,0[rad/s]$$

Además,

$$v_B = \omega L$$

$$v_B = 5,0 \cdot 1,2$$

$$v_B = 6,0\left[m/s\right]$$

d) Respecto del eje perpendicular al plano de esta hoja y que pasa por A, solo realiza torque el peso de la barra. Por tanto

$$\tau_{neto,A} = I_A \cdot \alpha$$

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{ML^2}{3}\alpha$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L}$$

$$\alpha = \frac{3 \cdot 9,8}{2 \cdot 1,2}$$

$$\alpha = 12,3[rad/s^2]$$

e) La componente de la aceleración del CM en la dirección "x" es la centrípeta o normal

$$a_N = a_x = -\omega^2 R = -\frac{3g}{L}\frac{L}{2}$$

$$a_x = -\frac{3g}{2}$$

$$a_x = -14,7[m/s^2]$$

La componente de la aceleración del CM en la dirección "y" es la tangencial

$$a_t = a_y = -\alpha R = -\frac{3g}{2L}\frac{L}{2}$$

$$a_y = -\frac{3g}{4}$$

$$a_y = -7,4[m/s^2]$$

Entonces la aceleración del CM pasa por la posición horizontal es

$$\vec{a} = -\frac{3g}{2}\hat{i} - \frac{3g}{4}\hat{j}$$

$$\vec{a} = -\left(14,7\hat{i} + 7,4\hat{j}\right)\left[m/s^2\right]$$

f) Las componentes de la fuerza $\overrightarrow{F_A}$ que ejerce el pasador sobre la barra son

$$F_x = H = Ma_x = -\frac{3}{2}Mg$$

$$H = -94,1[N]$$

$$F_y = V - Mg = -\frac{3}{4}Mg$$

$$V = \frac{1}{4}Mg$$

$$V = 15,7[N]$$

$$\overrightarrow{F_A} = -\frac{3}{2}Mg\hat{i} + \frac{1}{4}Mg\hat{j}$$

$$\overrightarrow{F_A} = \left(-94,1\hat{i} + 15,7\hat{j}\right)[N]$$

9.5 Energía cinética de rodamiento para un cuerpo rígido

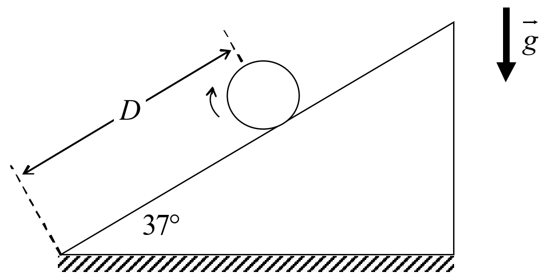
Cuando un objeto rueda, por ejemplo sobre la cubierta de una mesa, significa que el rota y simultáneamente se traslada. Es decir, rota en torno a un eje que no está fijo en el espacio y además avanza o retrocede. Ello significa que el rodamiento se entiende o puede modelarse como la "superposición" de una rotación pura más una traslación pura.

Para un sólido rígido que rueda sin resbalar (es decir, que cumple la condición $v = \omega R$), se puede aseverar correctamente que su energía cinética total es igual a la energía cinética de rotación en torno al CM más la energía cinética de traslación del CM, cuantitativamente, se tiene

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

con la condición (de no resbalamiento) $v_{CM} = \omega R$

Ejemplo 9.7 Una esfera maciza de masa M=3.0[kg] y radio R=0.10[m] sube sin deslizar sobre un plano inclinado en 37°. En el instante en que la esfera está a una distancia D=1.80[m] del punto de lanzamiento A, su rapidez es 2,4[m/s]. Determine la máxima distancia que alcanza a recorrer la esfera antes de comenzar a devolverse



Solución

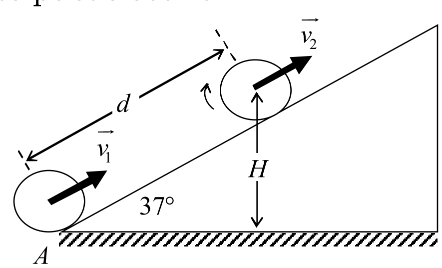
a) Por consideraciones energéticas

Como en esta situación problemática la energía se conserva y los datos de distancia y rapidez están referidos al centro de masa de la esfera, se puede escribir

$$\frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} M v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 + MgH$$

$$\frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} MR^2 \frac{v_1^2}{R^2} = \frac{1}{2} M v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} MR^2 \frac{v_2^2}{R^2} + MgH$$

$$\frac{7}{10} v_1^2 = \frac{7}{10} M v_2^2 + gd \operatorname{sen} 37°$$



Con $d = D = 1,80[m]$ y $v_2 = 2,4[m/s]$ se puede hallar primeramente la rapidez de lanzamiento $v_1 = v_A$

$$v_A = \sqrt{v_2^2 + \frac{10}{7} gD \operatorname{sen} 37°}$$

$$v_A = \sqrt{2,4^2 + \frac{10}{7} \cdot 9,8 \cdot 1,80 \cdot \operatorname{sen} 37°}$$

$$v_A = 4,57[m/s]$$

La máxima distancia d que alcanza a recorrer la esfera, se halla a partir de la condición $v_2 = 0$. Entonces,

$$v_A = \frac{10}{7} gd \operatorname{sen} 37°$$

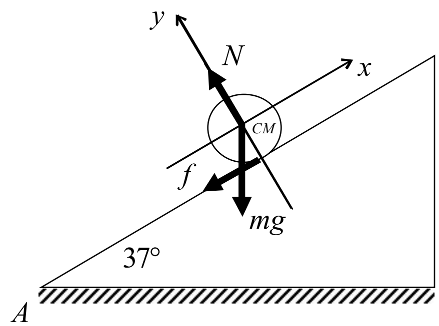
$$d = \frac{7v_A^2}{10g\,\text{sen}\,37°}$$

$$d = \frac{7\cdot 4,57^2}{10\cdot 9,8\cdot \text{sen}\,37°}$$

$$d = 2,5[m]$$

b) Por consideraciones dinámicas

Este problema también puede resolverse acudiendo a la segunda ley de Newton y a cinemática. La figura adjunta ilustra el diagrama de cuerpo libre de la esfera cuando asciende por el plano inclinado y se observa que ella está sometida a la acción de tres fuerzas constantes: peso (Mg), normal (N) y roce estático (f). Por tanto,



$$\sum \tau_{CM} = I_{CM}\alpha$$

$$f\cdot R = \frac{2}{5}MR^2\cdot\frac{a_{CM}}{R}$$

$$f = \frac{2}{5}Ma_{CM} \qquad (1)$$

$$\sum F_x = M\cdot a_{CM}$$

$$-f - Mg\,\text{sen}\,37° = M\cdot a_{CM}$$

$$-\frac{2}{5}Ma_{CM} - Mg\,\text{sen}\,37° = M\cdot a_{CM}$$ (al reemplazar "f" según (1))

$$-g\,\text{sen}\,37° = \frac{7}{5}a_{CM}$$

$$a_{CM} = -\frac{5}{7}g\,\text{sen}\,37°$$

Como

$$2a\left(x_2 - x_1\right) = v_2^2 - v_1^2 \qquad (2)$$

entonces

$$-2\cdot\frac{5}{7}g\,\text{sen}\,37°d = v_2^2 - v_A^2$$

$$v_A = \sqrt{v_2^2 + 2\cdot\frac{5}{7}g\,\text{sen}\,37°d}$$

$$v_A = \sqrt{2,4^2 + 2\cdot\frac{5}{7}\cdot 9,8\cdot\text{sen}\,37°1,80}$$

$$v_A = 4,57[m/s]$$

Para la máxima distancia d que alcanza a recorrer la esfera, se emplea la relación (2) elevada al cuadrado y se reemplaza en ella los datos disponibles, con la condición que

$$v_2 = 0$$

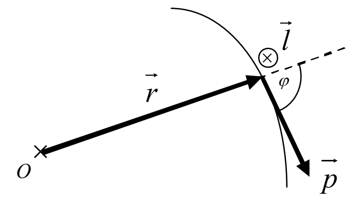
$$4,57^2 = 2\cdot\frac{5}{7}\cdot 9,8\cdot\text{sen}\,37°d$$

$$d = 2,5[m]$$

9.7 Conservación del momentum angular

El momentum angular $\vec{l}$ de una partícula se define como

$$\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$$

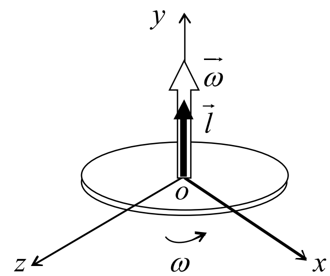


En la figura adjunta, el momentum angular es un vector perpendicular al plano de la figura, entrando a este y cuya magnitud es

$$l=r\cdot p\cdot\operatorname{sen}\varphi$$
$$l=r\cdot m\cdot v\cdot\operatorname{sen}\varphi$$

Para un conjunto de N partículas, el momento del sistema es

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_1$$



En tanto para un sólido rígido (ver figura)

$$L_z=I_0\omega$$

donde I_0 es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje z y que pasa por O.

El torque neto y externo sobre un conjunto de partículas está relacionado con el momento del sistema según

$$\overrightarrow{\tau_{ext}}=\sum_{i=1}^{N}\vec{\tau}_1=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

De igual forma, para un sólido rígido

$$\overrightarrow{\tau_{ext}}=\frac{d\vec{L}}{dt}=I\vec{\alpha}$$

La relación entre el torque neto resultante, momento de inercia y aceleración angular es fundamental en el tratamiento de la dinámica de rotación. Esa relación expresa que el torque neto externo sobre un rígido que gira en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia alrededor de ese mismo eje por la aceleración angular que experimenta tal sólido rígido. Esa expresión también es válida para el caso de que el cuerpo rígido rote en torno a eje móvil con tal que dicho eje por su centro de masa y sea un eje de simetría.

Cuando el torque neto externo $\overrightarrow{\tau_{ext}}$ que obra sobre un sistema es nulo, entonces el momentum angular del mismo es constante en magnitud, dirección y sentido, es decir, se conserva. En resumen, si

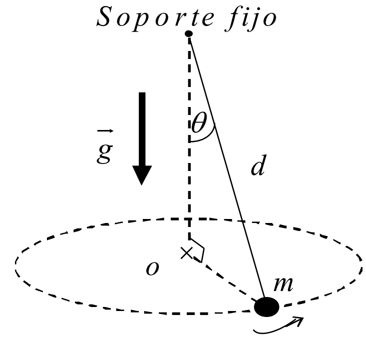
$$\overrightarrow{\tau_{ext}}=\vec{0}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

ello conduce a

$$\vec{L}_{inicial}=\vec{L}_{final}$$

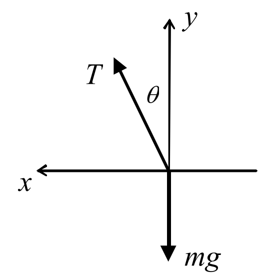
Ejemplo 9.9 Un péndulo cónico está constituido por una partícula que se mueve en una trayectoria circular, en un plano horizontal, con rapidez constante que está suspendida mediante una cuerda ideal de un soporte fijo, tal como muestra la figura adjunta. Demuestre que la magnitud del momentum angular de la partícula alrededor del centro de la trayectoria circular es

$$l = \sqrt{m^2 g d^3 \operatorname{sen}^4\theta / \cos\theta}$$



Solución

A partir del diagrama de fuerzas, mostrado en la figura y usando la segunda ley de Newton, puede escribirse



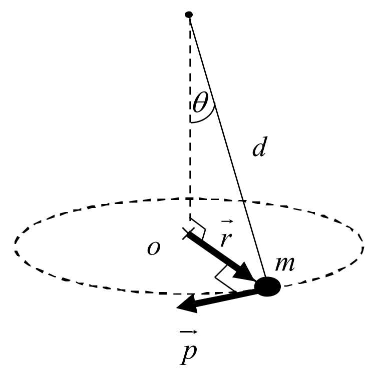
$$\sum F_x : \quad T \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$\sum F_y : \quad T\cos\theta = mg$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{r \cdot g \tan\theta}$$

Luego



$$l = r \cdot p \operatorname{sen} 90°$$

$$l = d \operatorname{sen}\theta \cdot m \cdot v$$

$$l = d \operatorname{sen}\theta \cdot m \cdot \sqrt{d \operatorname{sen}\theta g \operatorname{sen}\theta / \cos\theta}$$

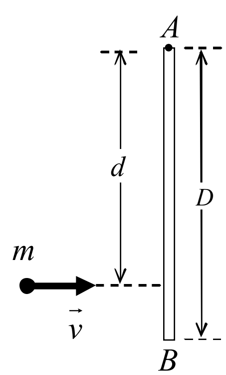
$$l = \sqrt{d^3 g \cdot m^2 \operatorname{sen}^4\theta / \cos\theta} \quad \text{(q.e.d)}$$

Ejemplo 9.10 Una varilla de longitud D y masa M puede rotar libremente alrededor de un pivote en A. Un proyectil de masa m y rapidez v golpea y se incrusta en la varilla, a una distancia d de A. Determine:

a) El momentum angular del sistema inmediatamente antes y después que el proyectil se incrusta en la varilla. Halle la rapidez angular del sistema.

b) El momentum lineal del sistema inmediatamente antes y después de la colisión.

c) Una relación entre d y D para que el momentum lineal se conserve.



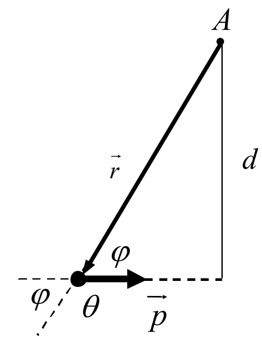
Solución

a) Inmediatamente antes

$$L_i = rp\,\text{sen}\,\theta = rp\,\text{sen}(180° - \varphi)$$

$$L_i = rp\,\text{sen}\,\varphi = pr\,\text{sen}\,\varphi$$

$$L_i = mvd$$



Inmediatamente después

$$L_f = I_A\omega + md^2\omega$$

$$L_f = \left(\frac{MD^2}{12} + \frac{MD^2}{4}\right)\omega + md^2\omega$$

$$L_f = \left(\frac{MD^2}{3} + md^2\right)\omega$$

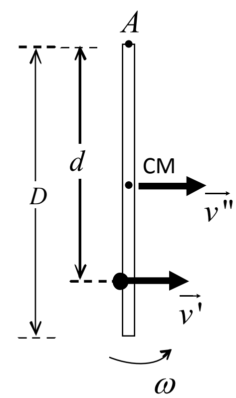
Como $\overrightarrow{\tau_{ext}} = \vec{0}$, entonces

$$mvd = \left(\frac{MD^2}{3} + md^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{v/d}{\dfrac{MD^2}{3md^2} + 1}$$

b) Instantáneamente antes de la colisión

$$p_i = mv$$



Inmediatamente después de la colisión

$$p_f = mv' + Mv''$$

$$p_f = md\omega + M\frac{D}{2}\omega$$

$$p_f = \left(md + \frac{MD}{2}\right)\omega$$

c) Para que el momentum se conserve, cualquier instante posterior a la colisión en el proyectil y la varilla, se requiere que

$$mv = \left(md + \frac{MD}{2}\right)\left[\frac{v/d}{\dfrac{MD^2}{3md^2} + 1}\right]$$

$$\left(\frac{MD^2}{3md^2} + 1\right)mv = \left(md + \frac{MD}{2}\right)\frac{v}{d}$$

$$\frac{MD^2}{3md^2} + 1 = 1 + \frac{MD}{2md}$$

$$\frac{MD^2}{3md^2} = \frac{MD}{2md}$$

$$d = \frac{2}{3}D$$

Tabla 2 Listado de algunas expresiones análogas para los movimientos de traslación y rotación

Traslación	**Cantidad física / concepto**	**Rotación**
x	Posición	θ
$v=\dfrac{dx}{dt}$	Rapidez ("velocidad")	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$
$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración	$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
$v=v_0+at$ $x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ $x=x_0+\left(\dfrac{v_0+v}{2}\right)t$ $2a\left(x-x_0\right)=v^2-v_0^2$	Expresiones para aceleración constante	$\omega=\omega_0+\alpha t$ $\theta=\theta_0+\omega_0t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$ $\theta=\theta_0+\left(\dfrac{\omega_0+\omega}{2}\right)t$ $2\alpha\left(\theta-\theta_0\right)=\omega^2-\omega_0^2$
$\vec{F}$	Fuerza Momento de fuerza	$\vec{\tau}$
m	Masa Momento de inercia	I
$dW=\vec{F}\bullet d\vec{l}$	Trabajo	$dW=\tau\bullet d\theta$
$K=\dfrac{1}{2}mv^2$	Energía cinética	$K=\dfrac{1}{2}I_0\omega^2$
$P=\vec{F}\bullet\vec{v}$	Potencia	$P=\tau\omega$
$p=m\vec{v}$	Momentum lineal Momentum angular	$l=I_0\omega$
$\overrightarrow{F_{neta}}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ $\overrightarrow{F_{neta}}=m\vec{a}\quad\left(m=cte\right)$	Segunda ley de Newton	$\overrightarrow{\tau_{neta}}=\dfrac{d\vec{l}}{dt}$ $\overrightarrow{\tau_{neta}}=I\vec{\alpha}\quad\left(I=cte\right)$

Ejemplo 9.11 Un cilindro gira en torno de un eje que pasa por el punto O. Una cuerda se enrolla sobre el cilindro y del extremo libre de aquella cuelga un cuerpo de masa M. Cuando el cuerpo se suelta del reposo, se observa que cae 1,5 [m] en 6,0 [s]. Determine:

a) La aceleración angular del cilindro.
b) La tensión de la cuerda
c) El momento de inercia del cilindro.

DATO: Radio del cilindro: 0,12 [m]

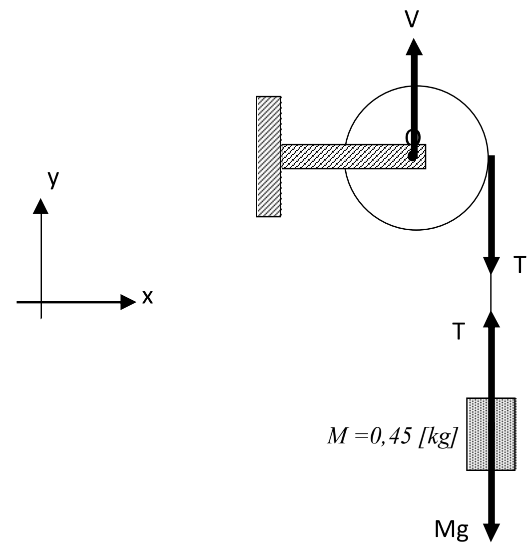
Solución

a) Dado que las fuerzas que actúan sobre el bloque son constantes, éste experimenta una aceleración constante y tiene un MRUA. Luego,

$$y = y_0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = 1{,}5 + \frac{1}{2}a \cdot 6{,}0^2$$

$$a = -0{,}083\left[m/s^2\right]$$



donde la aceleración "a" del bloque es igual a la de los puntos superficiales del cilindro

Como

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Entonces,

$$\alpha = \frac{0{,}083}{0{,}12}$$

$$\alpha = 0{,}69\left[m/s^2\right]$$

b) A partir del diagrama de cuerpo libre para el bloque, se tiene

$Mg - T = Ma$

$T = M(g - a)$

$T = 0{,}45\ (10 - 0{,}083)$

$T = 4{,}5\ [N]$

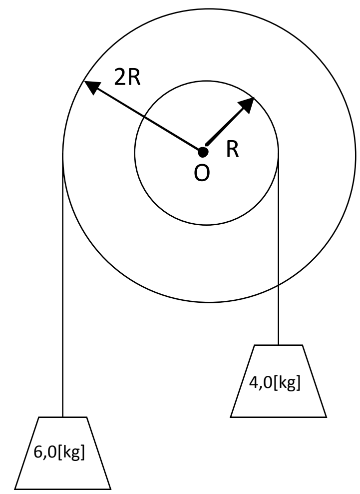
c) La sumatoria de torque sobre el cilindro es

$T \cdot R = I_0\, \alpha$

$$I_0 = \frac{4{,}5 \cdot 0{,}12}{0{,}69}$$

$$I_o = 0{,}77\left[kg \cdot m^2\right]$$

Ejemplo 9.12 Un disco de radio 2R y masa 5,0 [kg] está unido solidariamente a otro disco de radio R = 0,20 [m] y masa 3,0 [kg]. Ambos discos, macizos y homogéneos, giran en torno a un eje fijo que pasa por el punto O. Sobre cada uno de ellos se enrolla una cuerda ideal y de cada cuerda penden cuerpos de masas 6,0 [kg] y 4,0 [kg], respectivamente.



Determine:

a) El momento de inercia de ambos discos.

b) La aceleración angular de los discos.

c) La velocidad del bloque de 4,0 [kg], si inicialmente está en reposo, cuando se ha desplazado 1,5 [m].

Momento de inercia de un disco macizo y homogéneo: $MR^2/2$

<u>Solución</u>

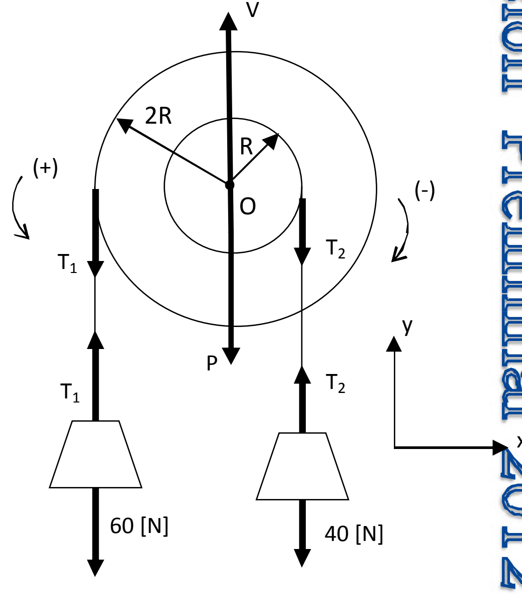
a) El momento de inercia para ambos discos corresponde a la suma de los momentos de inercia de cada disco, es decir,

$$I_0 = \frac{M_1(2R)^2}{2} + \frac{M_2R^2}{2}$$

$$I_0 = R^2\left(2M_1 + \frac{M_2}{2}\right)$$

$$I_0 = 0{,}20^2\left(2\cdot 5{,}0 + \frac{3{,}0}{2}\right)$$

$$I_0 = 0{,}46\left[kg\cdot m^2\right]$$



b) La figura adjunta muestra las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo sólido de interés.

Para el cuerpo de 6,0 [kg]

ΣF_y : $60 - T_1 = 6{,}0\, a_1$, con $a_1 = \alpha \cdot 2R$

$$T_1 = 60 - 12R\alpha \qquad (1)$$

Para el cuerpo de 4,0 [kg]

ΣF_y : $T_2 - 40 = 4{,}0\, a_2$, con $a_2 = \alpha R$

$$T_2 = 40 + 4R \qquad (\bullet\alpha R) \qquad (2)$$

La suma de torques en torno a 0 es

$$\Sigma\tau_0 : \quad T_1\cdot 2R - T_2R = I_0\alpha$$

$$2T_1 - T_2 = \frac{I_0\alpha}{R} \qquad (3)$$

Reemplazando convenientemente (2) y (3) en (1), se obtiene

$\alpha = 10{,}1\ [rad/s^2]$

c) Para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en la dirección "y", se cuenta con la relación

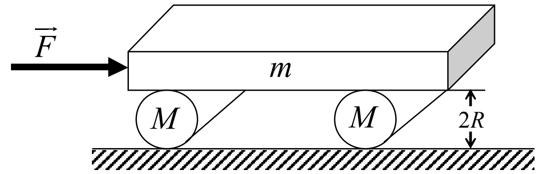
$$2\alpha_2\left(y_f - y_i\right) = v_f^2 - v_i^2 \quad \text{, donde } y_i = 0 \quad \text{y} \quad v_i = 0$$

$$2\alpha\cdot R\cdot y_f = v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2\cdot 10{,}1\cdot 0{,}2\cdot 1{,}5}$$

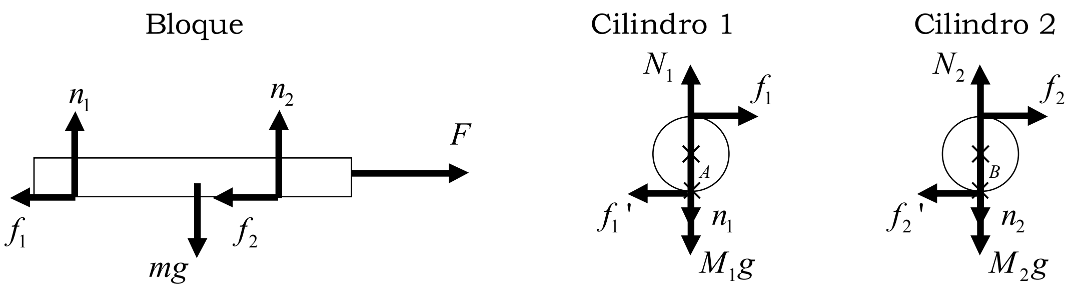
$$v_f = 2{,}5\left[m/s\right]$$

Ejemplo 9.13 Se armó un carro colocando un bloque de masa m=2,0[kg] sobre dos cilindros idénticos de masa M=m/3 y radio R=5,0[cm] se aplica una fuerza $\vec{F}$ horizontal y constante de magnitud 0,40[N], sobre el bloque. Con ello se logra que los rodillos rueden sin resbalar tanto con la superficie del bloque como con la del suelo. Determine la aceleración del bloque.



Solución

El diagrama de cuerpo libre para el bloque y cada uno de los cilindros se indican en la figura siguiente. En el caso del bloque se ha preferido representar las fuerzas en el cuerpo extenso en lugar de hacerlo en su centro de gravedad



La sumatoria de las fuerzas horizontales que se ejercen sobre el bloque es

$$F - f_1 - f_2 = ma$$

La sumatoria de los torque aplicados en cada cilindro, respecto de los ejes instantáneos que pasan por A y B, respectivamente, son

$$\sum \tau_A : \quad f_1 \cdot 2R = I_A \alpha_1 , \quad \text{con } I_A = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

$$f_1 \cdot 2R = \frac{3}{2} MR^2 \alpha_1$$

$$f_1 = \frac{3MR\alpha_1}{4}$$

$$\sum \tau_B : \quad f_2 \cdot 2R = I_B \alpha_2$$

$$f_2 \cdot 2R = \frac{3}{2} MR^2 \alpha_2$$

$$f_2 = \frac{3MR\alpha_2}{4}$$

Dadas las condiciones de la situación planteada, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ y $f_1 = f_2$, de tal suerte que

$$f_1 = f_2 = \frac{3MR\alpha}{4}, \text{ con } \alpha = \frac{a}{2R}$$

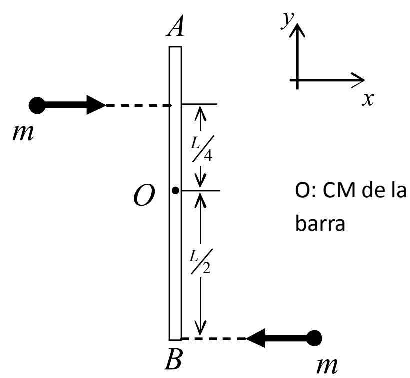
Al reemplazar estas últimas relaciones en la expresión para las fuerzas, se determina

$$F - 2\cdot\frac{3MR}{4}\cdot\frac{a}{2R} = ma$$
$$F - \frac{3Ma}{4} = ma$$

Como $M = \frac{m}{3}$, se halla

$$F = \frac{5}{4}ma$$
$$a = \frac{4F}{5m}$$
$$a = \frac{4\cdot 0,40}{5\cdot 2,0}$$
$$a = 0,16\left[m/s^2\right]$$

Ejemplo 9.14 Una barra homogénea de masa M y longitud L está en reposo sobre una mesa lisa. En cierto instante dos proyectiles, ambos de masa *m=M/2* y con igual rapidez v, se incrustan simultáneamente en la barra en las posiciones mostradas en la figura adjunta. Halle las rapideces de los extremos de la barra después de los impactos.



Solución
Para hallar las velocidades en los extremos A y B, se determina primero v_A y v_B, para lo cual se tiene presente que

$$v = \omega r$$

donde "*r*" es la distancia de cada extremo al centro de masa del sistema

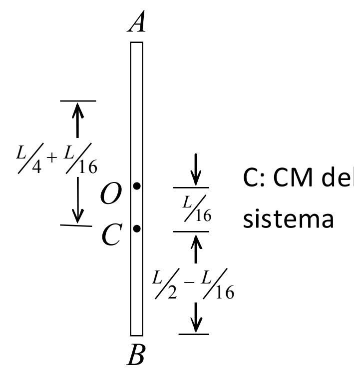
La suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema barra- proyectiles es nula, de modo que la velocidad de su centro de masas, que inicialmente es nulo, no varía. Ello significa que el movimiento final del sistema será un giro o rotación pura en torno a ese centro de masas CM.
La ordenada de CM es

$$y_{CM} = \frac{m\frac{L}{4} - m\frac{L}{2} + M\cdot 0}{M + 2m}$$
$$y_{CM} = \frac{-m\frac{L}{4}}{4m} = -\frac{L}{16}$$

El torque neto de las fuerzas externas es nulo, de modo que el momentum angular del sistema se conserva, es decir

$$l_{i,CM} = l_{f,CM}$$

Pero



$$l_{i,CM} = mv\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{16}\right)+mv\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{16}\right)$$

$$l_{i,CM} = mv\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{16}+\frac{L}{2}-\frac{L}{16}\right)$$

$$l_{i,CM} = \frac{3mvL}{4}$$

$$l_{f,CM} = \left[m\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{16}\right)^2+m\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{16}\right)^2+\frac{ML^2}{12}+M\left(\frac{L}{16}\right)^2\right]\omega$$

$$l_{f,CM} = \left[\frac{L^2}{16}+\frac{2L^2}{4\cdot 16}+\frac{L^2}{256}+\frac{L^2}{4}-\frac{2L^2}{2\cdot 16}+\frac{L^2}{256}+\frac{2L^2}{12}+\frac{2L^2}{256}\right]m\omega$$

$$l_{f,CM} = \frac{89}{192}mL^2\omega$$

Luego

$$\frac{3mvL}{4} = \frac{89}{192}mL^2\omega$$

$$\omega = \frac{144\cdot v}{89\cdot L}$$

Las rapideces en los extremos de la barra después de las colisiones son

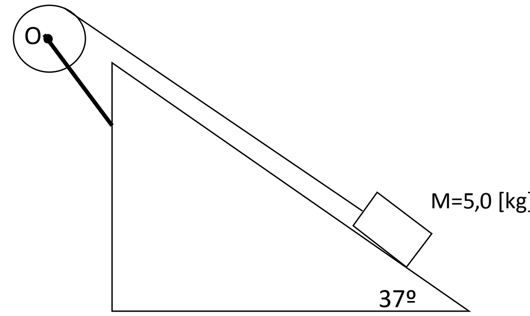
$$v_A = \left(\frac{L}{2}+\frac{L}{16}\right)\frac{144\cdot v}{89\cdot L}$$

$$v_A = \frac{81}{89}v$$

$$v_B = \left(\frac{L}{2}-\frac{L}{16}\right)\frac{144\cdot v}{89\cdot L}$$

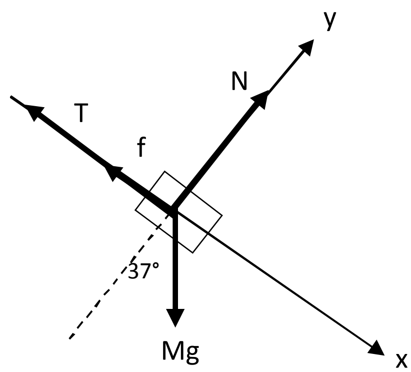
$$v_B = \frac{63}{89}v$$

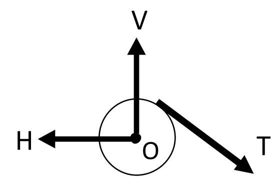
Ejemplo 9.15 Un cajón, de masa M, baja deslizando por un plano inclinado rugoso. El coeficiente de fricción cinética entre el cajón y la superficie del plano inclinado es 0,25. Un hilo de masa despreciable e indeformable une al cajón con un volante que puede girar en torno a un eje fijo que pasa por O. El radio del volante es 0,200 [m] y su momento de inercia respecto de O es 0,400 [kg·m²]. El cajón inicialmente está en reposo en la parte superior del plano inclinado.



a) Dibuje los diagramas de cuerpo libre del volante y del cajón.
Determine:
b) La aceleración del cajón.
c) La tensión de la cuerda.
d) La magnitud de la fuerza neta sobre el cajón cuando ha resbalado 1,00 [m].

Solución
a) En la figura adjunta se muestran los diagramas de cuerpo libre para el cajón y el volante.





b) Para el cajón,
$F_{neta,x} = ma$ y $F_{neta,y} = 0$
Luego,
$Mg\ sen\ 37^o - f - T = Ma$ (1)
$N - Mg\cos 37^o = 0$ (2)
$f = \mu N$
De (2) $f = \mu Mg\cos 37^o$ (3)
Para el volante, $\tau_{neto} = I_0 \cdot \alpha$
$T{\cdot}R = I_O\, a/ R$ (4)
Al reemplazar (4) y (3) en (1), se tiene

$$Mg \cdot \text{sen}\,37° - \mu Mg \cdot \cos 37° - \frac{I_0 a}{R^2} = ma$$

$$a = \frac{Mg\left(\text{sen}\,37° - \mu\cos 37°\right)}{M + I_0 / R^2}$$

$$a = \frac{5,0 \cdot 10\left(\text{sen}\,37° - 0,25\cos 37°\right)}{5,0 + 0,40 / 0,20^2}$$

$$a = 1,3\left[m / s^2\right]$$

c) De (4)

$$T = \frac{I_0 a}{R^2} = \frac{0,40 \cdot 1,3}{0,20^2}\ \mathrm{T} = \frac{\mathrm{I_O a}}{\mathrm{R}^2}$$

$$T = 13[N]$$

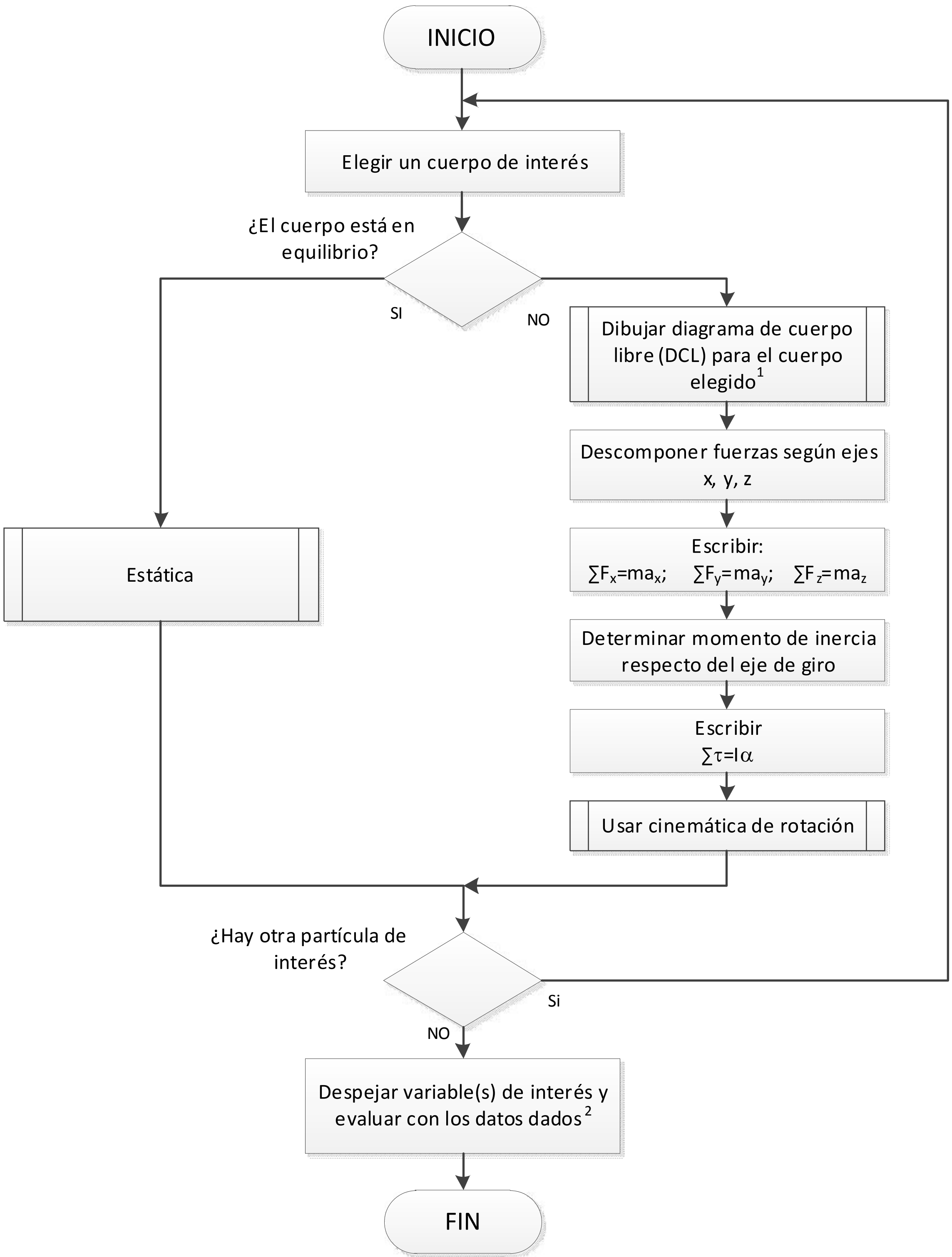
d) Sobre el cajón

$$F_{neta} = Ma = 5,0 \cdot 1,3$$

$$F_{neta} = 67[N]$$

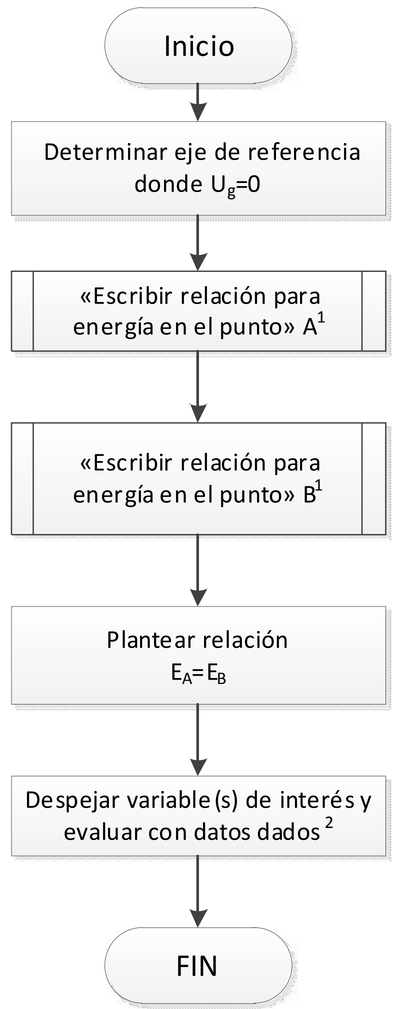
9.8 Diagramas de flujo para problemas con sólidos rigidos

9.8.1 Problemas de dinámica rotacional



[1] Por lo general, cuando se trate de cuerpos que pueden rotar, es recomendable representar las fuerzas en el lugar donde son aplicadas sobre el cuerpo.
[2] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

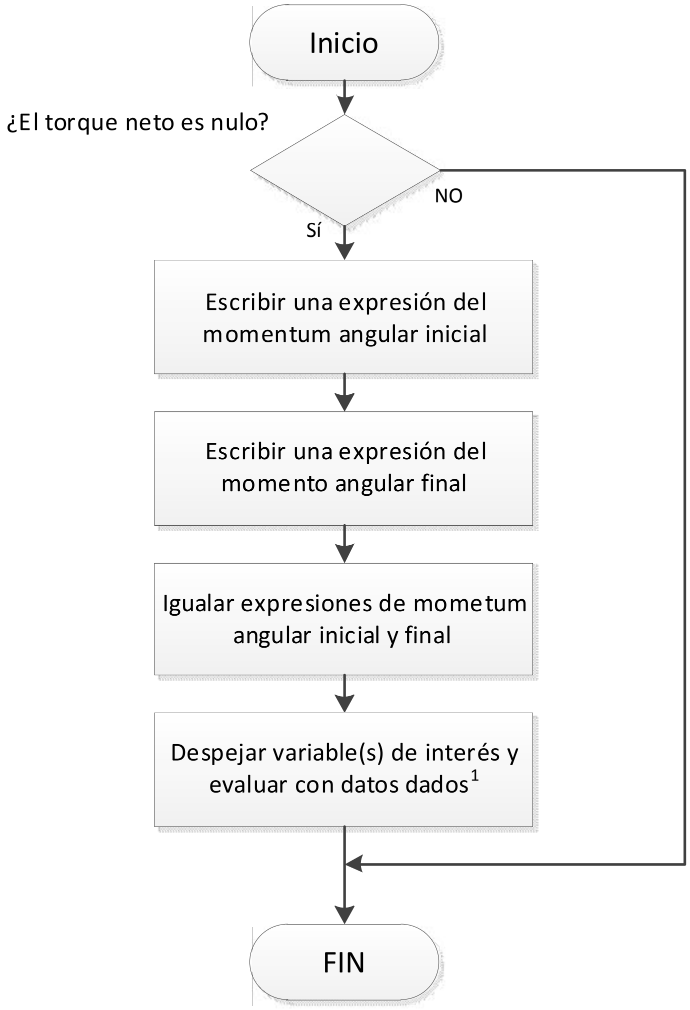
9.8.1 Problemas de energía cinética de rodamiento y su conservación



1 Recuerde que la energía cinética de rotación es $K=\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2+\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$. Si el movimiento es rotacional puro, entonces $K=\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$.

2 Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

9.8.2 Problemas de conservación del momentum angular



[1] Se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas hay.

9.9 Ejercicios Propuestos

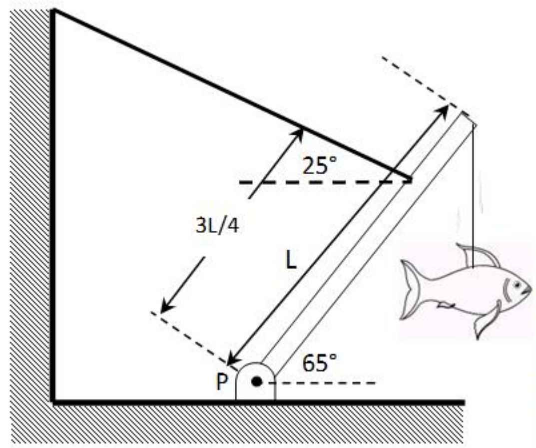
01) Un pescante uniforme de 1800 [N] se sostiene por medio de un cable, tal como se muestra en la figura adjunta. El pescante gira alrededor de un pivote P en la parte inferior y un pez de 2700 [N] cuelga de su parte superior.

a) Encuentre la tensión en el cable.

b) Halle las componentes (magnitud) de las fuerzas de reacción del pasador sobre el pescante.

c) Dibuje y determine la magnitud de la fuerza que ejerce el pasador sobre el pescante y el ángulo que forma ésta con la horizontal.

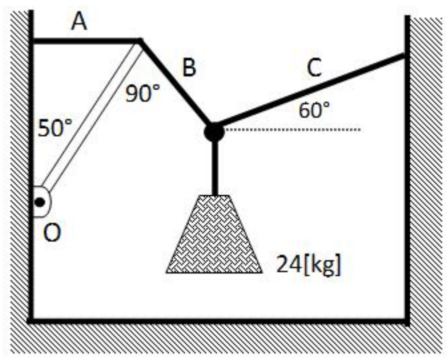
R.: a) T = 2029 [N] ;
b) H = 1839 [N] ;V = 3643 [N] ;
c) F = 4081 [N] ; ϕ = 63,2º



02) El sistema físico ilustrado en la figura adjunta está en equilibrio estático. El pescante es uniforme y tiene un peso de 100 [N].

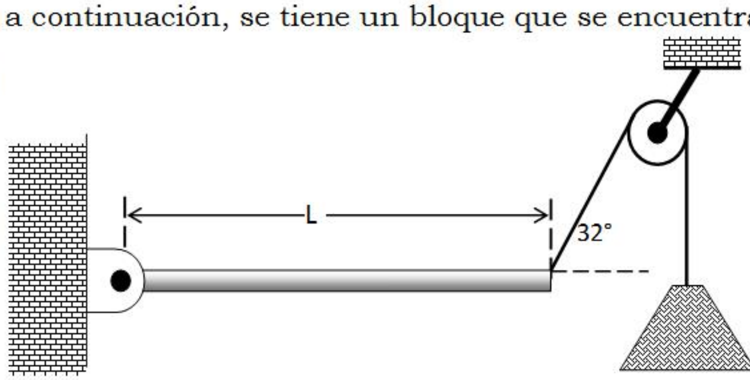
a) Determine la tensión de la cuerda B.
b) Halle la magnitud de la fuerza que ejerce el pasador O sobre el pescante.

R.: a) 125 [N] ; b) F = 262 [N]



03) En el sistema que se muestra a continuación, se tiene un bloque que se encuentra unido a la viga mediante una cuerda. Si la masa de la viga es de 30[kg], determine la masa M del bloque que se encuentra unido a la viga mediante un cable ideal, para que la viga se mantenga en equilibrio en la posición horizontal.

R.: M = 28,3 [kg]



04) En la figura, el pescante pesa 100 [N], es homogéneo y todas las cuerdas son ideales.

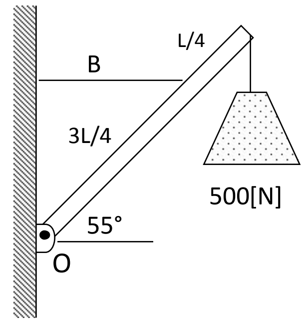
Determine:

a) La tensión en la cuerda B.

b) La magnitud de la fuerza que ejerce el pasador O sobre el pescante.

c) Dibuje y determine la magnitud de la fuerza que ejerce el pasador liso O sobre el pescante y el ángulo que forma ésta con la horizontal

R.: $T_B = 513$ [N] ; F = 789 [N]



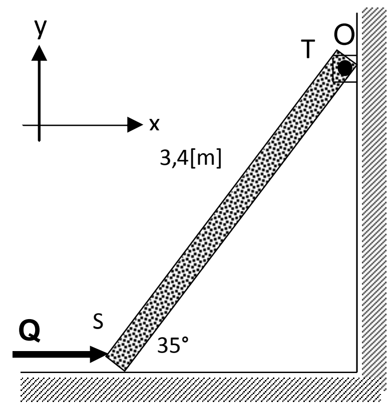
05) El extremo S de la barra ST de la figura adjunta descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento, mientras que el extremo T está colgado de un pasador liso O. Se ejerce sobre el extremo S una fuerza horizontal Q de 15,0 [kp] de magnitud. Si se desprecia el peso de la barra, halle:

a) Las magnitudes de las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pasador O sobre la barra ST.

b) La magnitud de la fuerza que ejerce la barra sobre el pasador y el ángulo que forma con +x.

R.: a) H = 15,0 [kp] ; V = 10,5 [kp] ;

b) F = 18,3 [kp] ; 35°



06) Una rueda de 500 [g], que tiene un momento de inercia igual a 0,015 [kg ·m^2], inicialmente está girando a 30 [rev/s]. Alcanza el reposo después de 163 [rev.] Encuentre la magnitud del torque de frenado.

R.: 0,26[Nm]

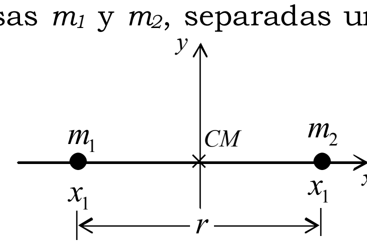
07) Sobre un volante se realiza un trabajo de 100 [J], de modo que su rapidez angular cambia de 60 [rev/min] a 180 [rev/min]. Encuentre el momento de inercia del volante.

R.: 0,63 [kg ·m^2]

08) Un sistema está formado por dos partículas de masas m_1 y m_2, separadas una distancia fija r, con respecto a un eje que pasa por su centro de CM y que es perpendicular a la recta que las une. Demuestre que el momento de inercia de este sistema es

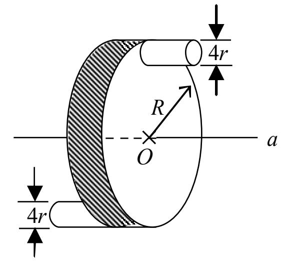
$$I = \mu r^2$$

siendo m la masa reducida del sistema $\mu = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$



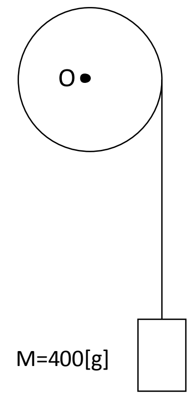
09) Encuentre el momento de inercia de la pieza maciza y homogénea de la figura adjunta, constituida por tres cilindros: el central tiene masa M y radio R; los otros dos son iguales y cada uno tiene masa m y radio $2r$.

R.: $\frac{1}{2}MR^2 + 4mr^2 + 2m\left(R-2r\right)^2$



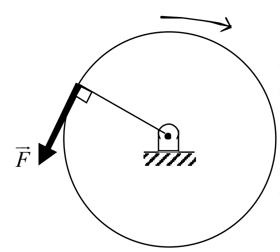
10) Una rueda gira en torno de un eje que pasa por el punto O. Una cuerda se enrrolla sobre la rueda y del extremo libre de aquella pende un cuerpo de masa M. Cuando el cuerpo se suelta del reposo se observa que cae 2,0 m en 6,5 s. Determine: a) la aceleración angular de la rueda; b) la tensión de la cuerda, c) el momento de inercia de la rueda.
Radio de la rueda: 15 cm

R.: 0,63 rad/s^2; 3,9 N; 0,92 kg ·m^2



11) Un disco tiene un momento de inercia de 20[kgm2] y gira a razón de 60[rpm]. En cierto instante se aplica sobre ella una fuerza tangencial $\vec{F}$, constante y se detiene en 90[s]. Determine: a) la magnitud del momento de fuerza aplicado; b) la magnitud de la aceleración de frenado; c) el número de vueltas que da el disco desde el instante que se aplica $\vec{F}$ hasta que se detiene.

R.: a) $\frac{4}{9}\pi\left[mN\right]$; b) $\frac{\pi}{45}\left[\frac{rad}{s^2}\right]$; c) 45[vueltas]



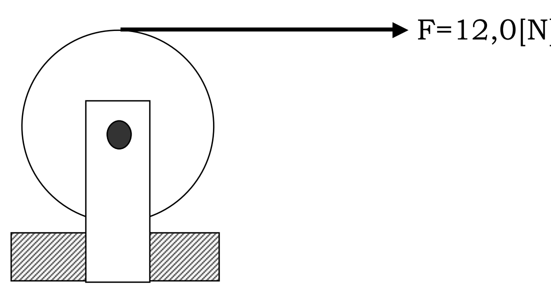
12) Un cable ligero, flexible e indeformable, está enrollado en el tambor de un torno, constituido por un cilindro sólido de 40 [kg] y 0,10 [m] de diámetro, que gira sobre un eje fijo horizontal montado en cojinetes sin fricción. Una fuerza constante de magnitud 12,0 [N] tira del extremo libre del cable una longitud de 3,6 [m]. El cable no resbala y el cilindro rota al desenrollarse. Si el cilindro está inicialmente en reposo, determine:

a) La aceleración angular y la aceleración lineal o tangencial del cable

b) La velocidad angular y la rapidez final del cable.

Momento de inercia de un cilindro: $\frac{MR^2}{2}$

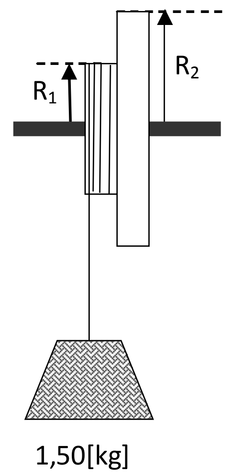
R.: a) 12 [rad/s^2], 0,6 [m/s^2];
b) 41,6 [rad/s], 2,1 [m/s]



13) Un cilindro macizo, de masa 2,0[kg] y radio 5,0[cm] rueda sin resbalar por un plano inclinado en 30°, después de haberse soltado. Halle: a) su rapidez luego de haber rodado 3,0[m] por el plano inclinado; b) el tiempo que ha tardado en recorrer los primeros 2,0[m].

R.: a) 4,4[m/s]; b) 0,90[s]

14) Dos discos metálicos, de radios R_1=3,00[cm] y R_2=6,00[cm] y, de masas M_1=0,80 [kg] y M_2=1,60 [kg], respectivamente, se sueldan juntos y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común, tal como se indica en la figura adjunta.



a) Determine el momento de inercia de cada disco y el momento de inercia total de los dos discos cuando están soldados.

b) Un hilo ligero se enrolla en el disco más pequeño y se cuelga de él un bloque de 1,50 [kg]. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2,00[m] sobre el piso, encuentre la rapidez que tiene justo antes de golpear el piso.

Momento de inercia de un disco: $I = \frac{MR^2}{2}$

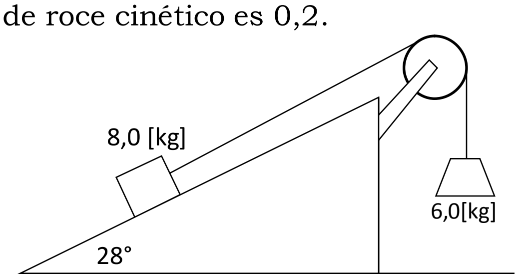
R.: a) $3,6 \times 10^{-4}$ [kg ·m²] , $2,9 \times 10^{-3}$ [kg ·m²],

$3,2 \times 10^{-3}$ [kg ·m²] ; b) 3,4 [m/s]

15) Un envase cilíndrico tiene una masa de 215 [g] y su altura y diámetro son, respectivamente, 10,8 [cm] y 6,38 [cm]. El envase se coloca en la parte superior de un plano inclinado en 25° y de 3,00 [m] de longitud y, se deja rodar. Determine el momento de inercia del envase si emplea 1,50 [s] para llegar a la parte inferior del plano inclinado.

R.: $1,2 \times 10^{-4}$ [kg ·m²]

16) Un bloque de 8,0 [kg] de masa sube por un plano inclinado en 28° respecto de la horizontal, arrastrado por una cuerda que pasa por una polea de 1,5 [kg] y de 0,15 [m] de radio. Del otro extremo de la cuerda cuelga un objeto de 6,0 [kg] de masa. El plano inclinado es rugoso y el coeficiente de roce cinético es 0,2.



a) Haga el diagrama de cuerpo libre de los bloques y de la polea.

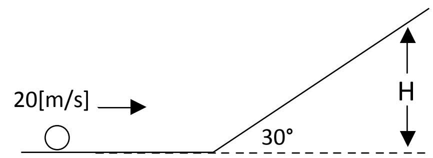
b) Determine la aceleración con que asciende el bloque sobre el plano inclinado.

c) Determine el valor de las tensiones a la que está sometida la cuerda.

R.: b) 0,58 [m/s²] ; c) 55,2 [N], 55,3 [N]

17) Una esfera sólida rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal, tal como se muestra en la figura adjunta. Luego, sube rodando por un plano inclinado. Encuentre el máximo valor de la altura H que alcanza la esfera.

R.: 29 m



18) Un volante que tiene la forma de un pesado disco circular de 0,600 [m] de diámetro y 200 [kg] de masa se monta sobre un cojinete sin fricción. Un motor acelera al volante desde el reposo hasta 1000 [rev/min]:

a) Halle el momento de inercia del volante.

b) Halle el trabajo que se realiza sobre el volante durante la aceleración.

Después que se ha alcanzado una rapidez angular de 1000 [rev/min] se desengrana el motor. Con un freno de fricción se disminuye esa rapidez hasta 500 [rev/min]. En esta situación determine:

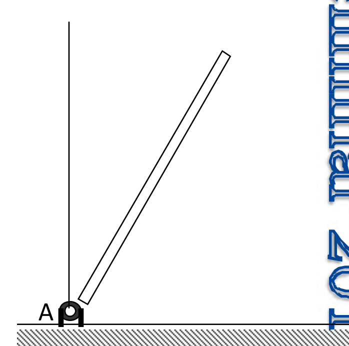
c) La energía que se disipa en el freno de fricción

R.: a) 9,0 [kg ·m^2] ; b) 49,3 [kJ] ; c) – 37,0 [kJ]

19) Una varilla delgada, de masa M y de longitud L, está articulada en su extremo inferior mediante un pasador liso A. Si inicialmente está en posición vertical y comienza a girar hacia el piso, encuentre la rapidez angular de la varilla cuando llega al piso.

Momento de inercia de la varilla respecto a su centro de masa: $ML^2/12$

R.: $\sqrt{3gL}$



20) Una varilla delgada, de masa M y de longitud L, está articulada en uno de sus extremos mediante un pasador liso O. La barra se suelta en su posición horizontal. Determine:

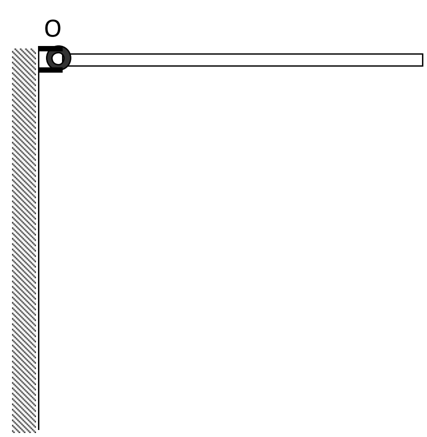
a) La aceleración angular inicial de la barra

b) La velocidad angular de la barra en su posición más baja (posición vertical).

c) La velocidad lineal del centro de masa y la velocidad lineal en el punto más bajo de la barra (posición vertical).

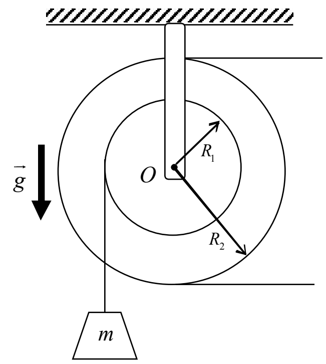
Momento de inercia de la varillarespecto a su centro de masa: $ML^2/12$

R.: a) $3g/2L$; b) $(3g/L)^{1/2}$; c) $v_{CM} = (3gL)^{1/2} / 2$, $(3gL)^{1/2}$



21) La figura muestra dos poleas, de radios $R_1=0,10$[m] y $R_2=0,20$[m], solidariamente unidas, de momento de inercia $I_0=100$[kgm^2]. Halle la diferencia de tensión entre las cuerdas horizontales de la cuerda, cuando el objeto de masa $m=500$[kg] a) baja con velocidad constante; b) sube con aceleración constante de 1,0[m/s^2]; c) baja con aceleración constante de 0,2[m/s^2]. Admita que las cuerdas no resbalan en el sistema de poleas

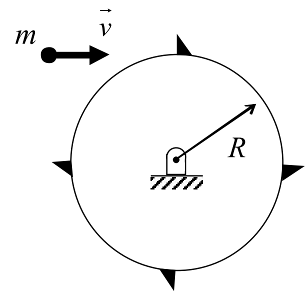
R.: a) $2,5\times10^3$[N]; b) $7,8\times10^3$[N]; c) $1,5\times10^3$[N];



22) Un volante de masa M y radio R tiene cuatro pequeños dientes ubicados simétricamente sobre su periferia. Un proyectil de masa m y velocidad $\vec{v}$ choca y se incrusta en un diente del volante, tal como se muestra en la figura adjunta. Determine la rapidez angular que adquiere el volante después de la colisión si inicialmente está en reposo.

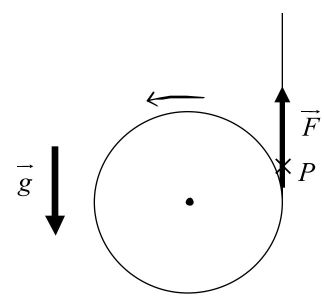
Datos: $M=98$[kg], $R=0,10$[m]; $v=200$[m/s]

R.: 40[rad/s]



23) Se enrolla una cuerda ideal sobre el borde de un disco de 10,0[cm] de radio y de 2,0[kg] de masa. Del extremo libre de la cuerda, dispuesta verticalmente, se tira hacia arriba con una fuerza constante $\vec{F}$. Determine: a) la aceleración del centro de masa; b) la rapidez angular del disco cuando se hayan desenrollado 2,0 [m]; c) la aceleración del punto P de la cuerda, o sea, del tramo recto de la misma

R.: a) 5,2[m/s]; b) 110[rad/s]; c) 35,2[m/s^2]



24) Para cualquier eje rotacional dado, el radio de giro K de un cuerpo rígido está definidopor la expresión $K^2=I/M$, donde M es la masa del cuerpo e I es el momento de inercia. Vale decir, el radio de giro es igual a la distancia entre una masa puntual imaginaria y el eje de rotación , tal que I para la masa puntual en torno a ese mismo eje es el mismo que para el cuerpo rígido. Determine el radio de giro para: a) un disco sólido de radio R y una esfera sólida de radio R, respecto de un eje que pasa cada uno de sus centros de masas; b) una barra uniforme de longitud L respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos.

(Nota: en práctica se suele expresar K^2 antes que K)

R.: a) $\frac{R}{\sqrt{2}}$, $R\sqrt{\frac{2}{5}}$; b) $\frac{L}{\sqrt{3}}$

25) Como consecuencia del roce, la rapidez angular de un disco varía en el tiempo según la relación

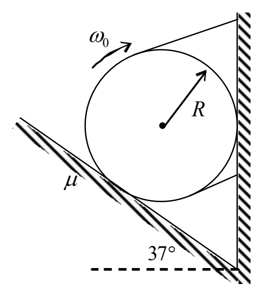
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$$

donde w0 y s son constantes. La rapidez angular cambia de 3,50[rad/s] en t=0 a 2,00[rad/s] en t=9,3[s]. Determine: a) el valor de ω_0; el valor de σ; c) el número de vueltas que da el disco en los primeros 2,5[s]; d) el número de vueltas que alcanza a girar el disco antes de detenerse

(Sugerencia: a partir de la expresión para $\theta(t)$, halle directamente $t_{máx}$ estudiando cualitativamente los valores que toma la función a medida que se incrementa el valor para t)

R.: a) 3,5[rad/s]; b) 0,060[1/s]; c)1,29[vueltas]; d) 9,28 [vueltas]

26) Un cilindro macizo, de masa 10[kg] y radio 20[cm] se coloca en la posición indicada en la figura cuando está girando a razón de 5,0 vueltas por segundo con respecto a un eje que coincide con su eje de simetría. Toma contacto con la pared y el suelo al mismo tiempo, lo que son rugosos y tienen un coeficiente de roce iguala μ=0,25. Determine la aceleración angular del cilindro y el número de vueltas que da entes de detenerse.



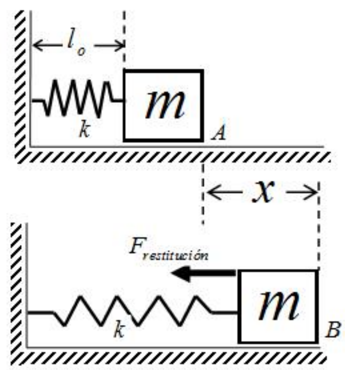
(Sugerencia: Tener presente que el centro de masa del cilindro está en reposo, en otros términos, el cilindro solo rota)

R.: -52,9[rad/s^2]; 1,5[vuelta]

10 Movimiento Armónico Simple

Cuando la fuerza que restituye una partícula a su posición de equilibrio, es proporcional a la distancia medida desde la posición de equilibrio, el movimiento de la partícula corresponde a un Movimiento Armónico Simple (MAS), en el cual la posición de la partícula puede representarse por una función senoidal, cuyo periodo no depende de la amplitud del movimiento.

En el caso de un resorte ideal unido a una masa, como el mostrado en la figura, la fuerza de restitución puede expresarse



$$F_{Restitución} = -kx$$

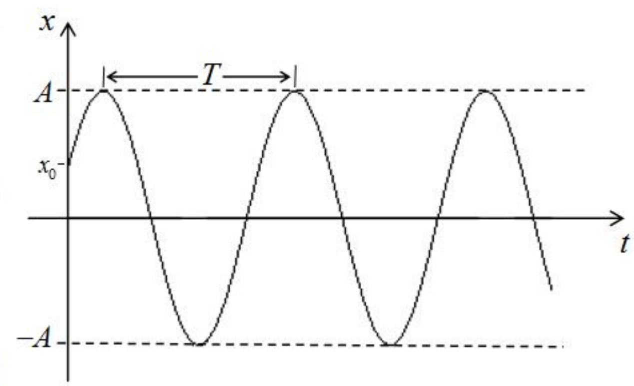
Utilizando la segunda ley de Newton

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-kx = ma_x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden, puede reescribirse así



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

cuya solución se muestra en la figura adjunta y puede expresarse [1] como

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

con

A : Amplitud del movimiento, la cual depende de las condiciones iniciales.

ϕ : Fase inicial, la cual también depende de las condiciones iniciales.

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, la frecuencia angular, medida en [rad/s]

Como puede apreciarse hay dos constantes, A y f, que dependen de dos condiciones iniciales a especificar, por ejemplo posición y velocidad en cierto instante.

[1] Otra forma de expresar la solución es

$$x = A\,\text{sen}\left(\omega t + \delta\right)$$

Una tercera forma de expresar la solución es

$$x = C\,\text{sen}\,\omega t + D\cos\omega t$$

De este modo, además el período *"T"*, es el tiempo que tarda la partícula en realizar una oscilación completa, y se expresa como

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

y la frecuencia *"f"*, que corresponde al número de oscilaciones que realiza la partícula por unidad de tiempo, es

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

La velocidad instantánea de la partícula sobre el eje x, es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

y la aceleración instantánea de la partícula

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

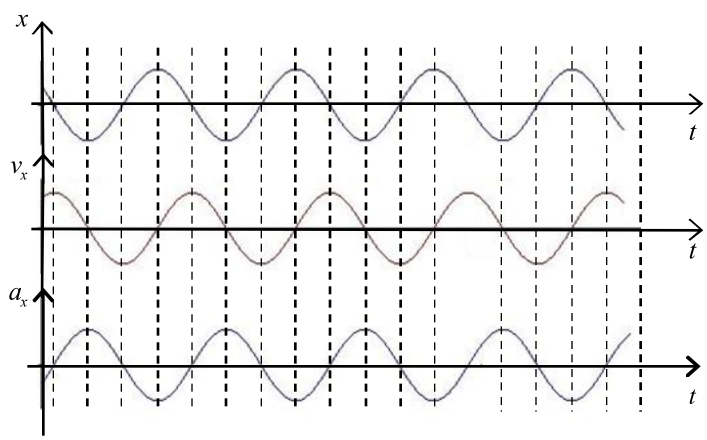
$$a_x = -\omega^2 x$$

Teniendo presente que el valor máximo de las funciones sen y coseno es 1, se halla que la velocidad y aceleración máxima de la partícula son, respectivamente,

$$v_{x,Máx} = A\omega$$

$$a_{x,Máx} = A\omega^2$$

En la figura adjunta se muestran al mismo tiempo la posición, velocidad y aceleración instantánea donde se observa que cuando la partícula se encuentra en la posición máxima (positiva o negativa), la rapidez es cero y la aceleración es máxima. Así también, cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio su velocidad es máxima y la aceleración nula.



Ejemplo 10.1 Un oscilador armónico simple está descrito por

$$x = 4,0\cos(0,10t + 0,50)$$

donde todas las cantidades se expresan en unidades SI

Determine:

a) La amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento;
b) La velocidad y aceleración;
c) Las condiciones iniciales del oscilador armónico.
d) La posición velocidad y aceleración en el instante *t=5,0*[s]

Solución

a) $A = 4,0[m]$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,10} = 63[s]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0,10}{2\pi} = 0,016[Hz]$$

$$\phi = 0,50[rad] = 29°$$

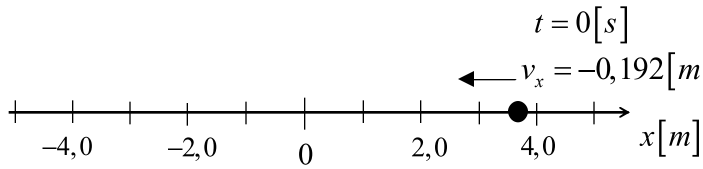
b) $$v_x = \frac{dx}{dt} = -0,40\,\text{sen}(0,10t + 0,50)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0,040\cos(0,10t + 0,50)$$

c) $$x(0) = 4,0\cos(0,50) = 3,51[m]$$

$$v_x(0) = -0,40\,\text{sen}(0,50) = 0,192[m/s]$$

Por tanto, en el instante t=0, el oscilador pasa por la posición $x=+3,51[m]$ con rapidez v=0,192[m/s], moviéndose hacia el origen del sistema del sistema de referencia

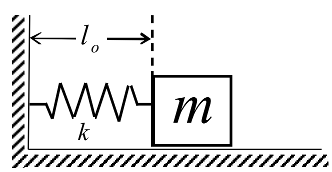


d) $$x(5,0) = 4,0\cos(0,10\cdot 5,0 + 0,50) = 2,16[m] = 2,2[m]$$

$$v_x(5,0) = -0,40\,\text{sen}(0,10\cdot 5,0 + 0,50) = -0,337[m/s] = 0,34[m/s]$$

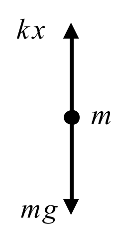
$$a_x(5,0) = -0,040\cos(0,10\cdot 5,0 + 0,50) = -0,0216[m/s^2] = -0,022[m/s^2]$$

Ejemplo 10.2: Un resorte ideal se cuelga de forma vertical. Al colgar del resorte una masa de m=0,50[kg] este se estira una distancia y=0,61[m]. Luego con el mismo resorte y misma masa se monta el sistema de la figura adjunta y el resorte se estira una distancia de x=0,10[m] respecto de su longitud natural y se suelta quedando en un movimiento armónico simple. Determine:



a) La constante k del resorte.
b) La amplitud de la oscilación
c) La velocidad angular ω, el periodo *T* y la frecuencia *f* de la oscilación
d) Una expresión para la posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo
e) La velocidad y aceleración máxima de la partícula.

Solución



a) La figura adjunta ilustra el diagrama de cuerpo libre del objeto colgado de un resorte vertical, cuando está en equilibrio. Luego,

$$kx - mg = 0$$

$$kx = mg$$

$$k = \frac{mg}{x}$$

$$k = \frac{0,50 \cdot 9,8}{0,61}$$

$$k = 8,0\left[N/m\right]$$

a) $A = 0,10\left[m\right]$

b) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{8,0}{0,50}}$$

$$\omega = 4,0[rad/s]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{4,0}$$

$$T = 1,6[s]$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{1,6}$$

$$f = 0,63[Hz]$$

c) Puesto que en $t=0$, la posición es $x_0=A=0,10$[m] y la velocidad $v=0$, entonces

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

$$x = 0,10\cos\left(4,0t\right)\left[m\right]$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -0,10 \cdot 4,0\,\text{sen}\left(4,0t\right)$$

$$v = -0,40\,\text{sen}\left(4,0t\right)\left[m/s\right]$$

$$a = \frac{dv_x}{dt} = -0,10 \cdot 4,0^2\cos\left(4,0t\right)$$

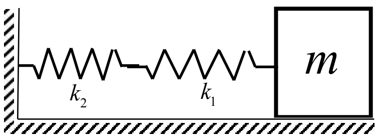
$$a = -1,6\cos\left(4,0t\right)\left[m/s^2\right]$$

d) $v_{máx} = -0,4\left[m/s\right]$

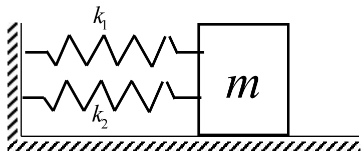
$$a_{máx} = 1,6\left[m/s^2\right]$$

Ejemplo 10.3 Para cada uno de los siguientes sistemas con resortes, determine si oscilarían con un MAS y que valores tendrían las frecuencias angulares de las oscilaciónes

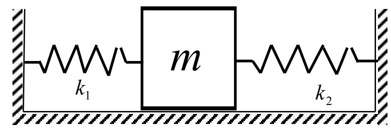
a)



b)



c)



<u>Solución</u>

a) Al tirar de la masa la fuerza de restitución es la misma para ambos resortes, y el desplazamiento total es la suma de los desplazamientos parciales, es decir,

$$x = x_1 + x_2$$

con $x_1 = \frac{F}{k_1}$ y $x_2 = \frac{F}{k_2}$, entonces

$$x = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2}$$

$$x = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$F = -\frac{x}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)} = -\left(\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}\right)x$$

Como la fuerza de restitución puede escribirse como una constante por el desplazamiento, entonces ocurriría un MAS de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

b) En este caso, los desplazamientos son iguales y la fuerza total es

$$F = -F_1 - F_2$$

$$F = -k_1 x - k_2 x$$

$$F = -(k_1 + k_2)x$$

Como la fuerza de restitución puede escribirse como una constante por el desplazamiento, entonces ocurriría un MAS de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

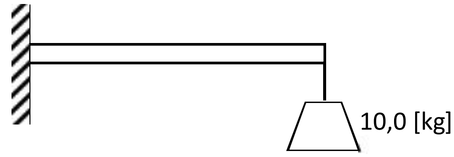
c) En este caso los desplazamientos son también son iguales, y se repiten las mismas consideraciones del caso anterior. Así

$$F = -(k_1 + k_2)x$$

Como la fuerza de restitución puede escribirse como una constante por el desplazamiento, entonces ocurriría un MAS de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Ejemplo 10.4 Cuando una masa de 10,0 [kg] se une al extremo de una viga elástica, su desviación de la horizontal es 8,0 [mm]. Si se desprecia la masa de la viga, calcule la frecuencia de oscilación del sistema, suponiendo un movimiento armónico simple.



Solución

Para el M.A.S., $F = -ma$, donde en este caso $F = Mg$ y $a = -\omega^2 A$.
Por tanto,

$$Mg = +M\omega^2 A$$
$$g = \omega^2 A$$
$$g = A\cdot(2\pi f)^2$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}$$
$$f = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{9{,}8}{8\cdot 10^{-3}}}$$
$$f = 5{,}57[Hz]$$

Ejemplo 10.5 Una partícula se mueve a lo largo del "eje x" describiendo un movimiento armónico simple de período igual a 0,10 [s]. Se sabe que en t = 0, x(0) = 5,0 [cm] y v(0) =6,0 [cm/s].
Determine:
a) la frecuencia angular ω.
b) La fase inicial φ.

Solución

a) Como $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$, entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{1/10} = 20\pi = 62{,}83\left[rad/s\right]$$

b) Se supone que $y = Asen(\omega t + \phi)$

y que $v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

Al tener presente las condiciones iniciales, se puede anotar

$$0{,}05 = Asen\phi$$

y $$0{,}06 = A\omega\cos\phi$$

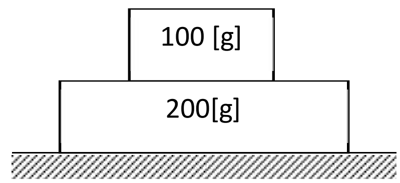
De lo anterior se concluye que

$$tg\phi = \frac{0{,}05\cdot 62{,}83}{0{,}06}$$
$$\varphi = 1{,}552\left[rad\right] = 88{,}9°$$

Ejemplo 10.6 Un bloque de 100 [g] se coloca sobre un bloque de 200 [g], como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de fricción estática entre los dos bloques es 0,20. El bloque de abajo se mueve hacia delante y hacia atrás horizontalmente en un movimiento armónico simple que tiene una amplitud de 6,0 cm .

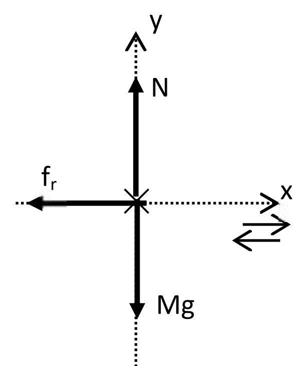
a) Si se mantiene la amplitud constante, cuál es la frecuencia más alta para la cual el bloque superior no deslizará respecto del bloque inferior?

b) Suponga que el bloque inferior se mueve verticalmente en un movimiento armónico simple y no horizontalmente. La frecuencia se mantiene constante en 2,0 oscilación/s mientras la amplitud se incrementa en forma gradual. Determine la amplitud a la cual el bloque superior ya no mantendrá contacto con el bloque inferior.



Solución

a) Conforme al diagrama de fuerzas adjunto y dado que la fuerza de roce actúa como un fuerza recuperadora, se puede anotar



$$-f_r = ma$$
$$-f_r = -m\omega^2 A$$

Como

$$f_r = \mu_S N = mg$$

entonces

$$m\omega^2 A = \mu_S mg$$
$$(2\pi f)^2 A = \mu_S g$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_S g}{A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0,20 \cdot 9,8}{6 \cdot 10^{-2}}}$$

b) Del diagrama de fuerzas, se puede anotar que

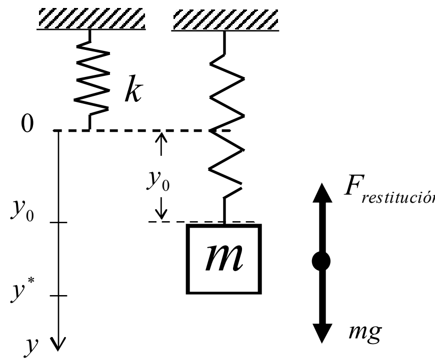
$$N - mg = ma$$

Cuando el bloque superior ya no mantiene contacto con el bloque inferior, N = 0, de modo que

$$-mg = -m\omega^2 A$$
$$A = \frac{g}{\omega^2}$$
$$A = 0,30\left[m\right]$$

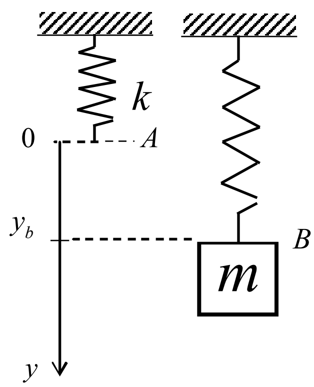
10.1 Partícula oscilante cuando está unida a un resorte vertical

Cuando de un resorte ideal vertical se cuelga una partícula (objeto) de masa M y se permite que el primero se estire hasta equilibrar el peso del cuerpo, se cumple



$$F_{restitución} = mg$$
$$ky_0 = mg$$
$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

Es decir, la posición de equilibrio del resorte cuando no está cargado corresponde a $y=0$, en tanto que cuando hay un objeto colgado de su extremo libre la posición de equilibrio queda especificada por $y_0=mg/k$.

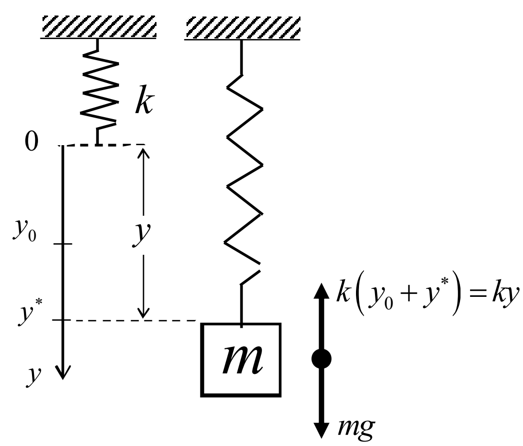


Una situación distinta se origina cuando del extremo libre de un resorte ideal vertical se cuelga un objeto (punto A de la figura adjunta) y luego se suelta.

El objeto cae estirando al resorte y se detiene instantáneamente en B, para luego comenzar a subir. Como entre A y B se conserva la energía mecánica,

$$E_A = E_B$$
$$mgy_B = \frac{1}{2}ky_B^2$$
$$y_B = \frac{2mg}{k}$$
$$y_B = 2y_0$$

Considérese ahora la situación cuando del extremo libre del resorte se cuelga un objeto, la posición de equilibrio cambia a y_0, el objeto se arrastra hacia abajo una distancia y^* y luego se suelta.



En este caso la segunda ley de Newton conduce a

$$-ky + mg = ma_y$$
$$-ky + mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$-k\left(y_0 + y^*\right) + mg = m\frac{d^2}{dt^2}\left(y_0 + y^*\right)$$
$$-ky_0 - ky^* + mg = m\frac{d^2y^*}{dt^2}, \qquad \text{con } mg = ky_0$$
$$0 = m\frac{d^2y^*}{dt^2} + ky^*$$
$$\frac{d^2y^*}{dt^2} + \frac{k}{m}y^* = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial (lineal de segundo orden) es conocida y puede escribirse

$$y^{*} = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

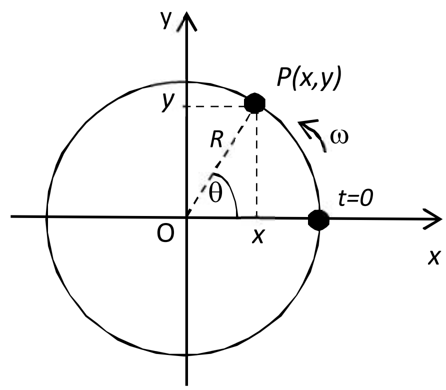
Es decir,

$$y - y_0 = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$
$$y = y_0 + A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

Relación que permite aseverar que la partícula experimenta un movimiento armónico simple en torno al punto $y=y_0$.

10.2 Relación entre MCU y MAS

Una partícula que gira con rapidez angular w, o sea está afectada por un MCU en sentido antihorario. El movimiento de la partícula puede describirse en términos de las siguientes ecuaciones paramétricas, las que corresponden a cada una de las coordenadas del punto P en función del tiempo (ver figura adjunta). En efecto,



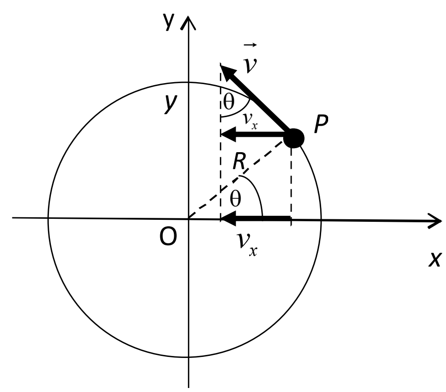
$$x = R\cos\theta = R\cos\omega t$$
$$y = R\,\mathrm{sen}\,\theta = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Si cada una de esas expresiones se eleva al cuadrado y luego se suman miembro a miembro, se encuentra

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ello quiere decir que un MCU puede considerarse como la superposición de dos MAS mutuamente ortogonales, cuya frecuencia angular es igual a la rapidez angular con que gira la partícula en torno al centro O de la trayectoria.

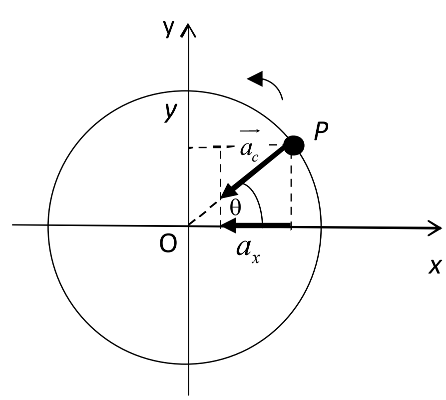
Al proyectar la velocidad de la partícula sobre el eje x se halla



$$v_x = -v\,\mathrm{sen}\,\theta = -v\,\mathrm{sen}\,\omega t$$
$$v_x = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

de modo que la velocidad en la dirección x, del MAS se obtiene de modo "coloquial" a partir de la figura adjunta.

Al proyectar la aceleración (centrípeta) que experimenta la partícula en el punto P, sobre el eje x, obtiene



$$a_x = -a_c\cos\theta$$
$$a_x = -\omega^2 R\cos\omega t$$
$$a_x = -\omega^2 x$$

lo que también permite afirmar que la aceleración en la dirección x, del MAS, se obtiene también "coloquialmente" a partir de la figura adjunta.

10.3 Energía en el MAS

Como ya se mencionó, cuando la partícula está en la posición de amplitud máxima su rapidez es cero. En este caso la energía del sistema corresponde sólo a la energía potencial elástica del resorte, pues la energía cinética es cero, y en consecuencia

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

La energía en cualquier punto está dada por

$$E = K + U_{el}$$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

con $x = A\cos(\omega t + \phi)$

y $v = -A \cdot \omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

Con lo que se obtiene

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$

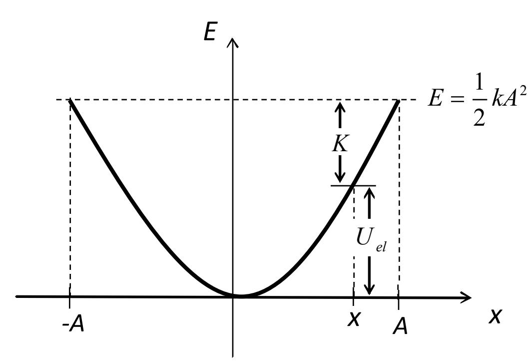
Dado que $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

entonces

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Puede concluirse que al no haber trabajo de otras fuerzas, la energía mecánica se conserva, y es constante en todos los puntos de la trayectoria seguida por la partícula, como era esperable.



En la figura adjunta se muestra un gráfico de la energía mecánica en función de la distancia y en ella se puede observar que en cualquier punto de la trayectoria la energía total es constante y corresponde a la suma de la energía cinética más la potencial elástica.

Ejemplo 10.7 En cierto MAS con $m=0,5$[kg], $k=8,0$[N/m], $A=0,10$[m] y $x=0,10\cos(4,0t)$. Determine:

a) La velocidad de la partícula cuando está a $6,0$[cm] de la posición de equilibrio.
b) El tiempo que tarda en pasar desde $x_0=10$[cm] a $x=3,0$[cm]

Solución

a) Como en el MAS la energía mecánica se conserva,

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$kA^2-kx^2=mv^2$$

$$v^2=\frac{k\left(A^2-x^2\right)}{m}$$

$$v=\sqrt{\frac{k\left(A^2-x^2\right)}{m}}$$

$$v=\sqrt{\frac{8,0\left(0,10^2-0,06^2\right)}{0,5}}$$

$$v=\pm 0,32\left[m/s\right]$$

b)
$$x=0,10\cos\left(4,0t\right)$$

$$0,03=0,10\cos\left(4,0t\right)$$

$$\frac{0,03}{0,10}=\cos\left(4,0t\right)$$

$$4,0t=\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{0,03}{0,10}\right)$$

$$t=\frac{\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{0,03}{0,10}\right)}{4,0}$$

$$t=0,32[s]$$

Ejemplo 10.8 Una masa de 2,4 [kg] oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con un movimiento armónico simple, de amplitud 0,40 [m] y frecuencia de 0,80 [Hz]. En t = 0,00 [s], la posición de la partícula es 0,40 [m]. Determine para la partícula:

a) Una expresión para la posición en función del tiempo x(t).
b) La energía cinética máxima.
c) La energía potencial cuando está a 0,10 [m] del origen.

Solución

a) Una expresión para el movimiento armónico simple es

$$x(t) = Asen(\omega t + \phi)$$

Como x(0) = 0,40 [m], entonces

$$0,40 = 0,40 \cdot sen\phi, \text{ de donde } sen\phi = 1 \text{ y } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,

$$x = 0,40 \cdot sen\left(2\pi \cdot 0,80t + \frac{\pi}{2}\right)$$

o

$$x = 0,40 \cdot \cos\left(5,03 \cdot t\right)$$

b) La energía cinética está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Pero,

$$v = \frac{dx}{dt} = -0,40 \cdot 5,03 sen\left(5,03t\right)$$

$$v^2 = (0,40 \cdot 5,03)^2 \cdot sen^2\left(5,03t\right)$$

Luego,

$$K_{máx} = 0,5 \cdot 2.4 \cdot (0,40 \cdot 5,03)^2$$

$$K_{máx} = 4,86\left[J\right]$$

c) La energía potencial elástica está dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2, \text{ con } k = m\omega^2 = 2,4 \cdot (2\pi \cdot 0,80)^2 = 60,58\left[N/m\right].$$

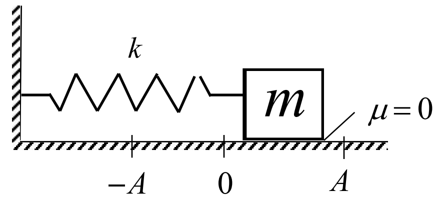
Por último,

$$U = \frac{1}{2}60,58 \cdot 0,10^2$$

$$U = 0,30\left[J\right]$$

Ejemplo 10.9 Una partícula de masa m, unida a un resorte ideal de constante k, se mueve con un MAS. Determine:

a) La energía mecánica total del sistema masa resorte en cualquier distancia x
b) La ecuación diferencial del movimiento a partir de la energía mecánica total.



Solución

a) El sistema oscilante sólo tiene energía potencial elástica y energía cinética. Luego,

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

b) La expresión a obtener es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Como la posición x y la velocidad v son variables dependientes del tiempo, en tanto que la energía mecánica total E es una constante (recuerde que $E = \frac{1}{2}kA^2$), es sugerente derivar respecto al tiempo la expresión para la energía. Entonces,

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$0 = \frac{1}{2}k2x\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt}$$

$$0 = \left(kx + m\frac{dv}{dt}\right)v$$

$$0 = \frac{k}{m}x + \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ejemplo 10.10 Una partícula de masa "m" se mueve con MAS, cuando está unida a un resorte de constante "k". En el instante inicial (t=0), la posición de la partícula es "A_0" y su rapidez inicial es "v_0". Determine: a) periodo; b) amplitud; c) ángulo de fase y d) relación para la posición de la partícula.

Solución

a) La frecuencia angular del MAS es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Entonces, su periodo y frecuencia son

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) Dada la ecuación de posición

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi\right), \quad \text{con } x\left(0\right) = A_0$$

$$A_0 = A\cos\left(\phi\right) \qquad (1)$$

La velocidad es

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right), \quad \text{con } v\left(0\right) = v_0$$

$$v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\left(\phi\right)$$

$$\frac{v_0}{\omega} = -A\operatorname{sen}\left(\phi\right) \qquad (2)$$

Al elevar al cuadrado las relaciones (1) y (2) y sumarlas miembro a miembro, se obtiene

$$A_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2\left[\cos^2\left(\phi\right) + \operatorname{sen}^2\left(\phi\right)\right]$$

$$A = \sqrt{A_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

c) Al dividir la relación (2) por la relación (1), se tiene

$$-\frac{v_0}{A_0\omega} = \frac{\operatorname{sen}\left(\phi\right)}{\cos\left(\phi\right)}$$

$$\tan\left(\phi\right) = -\frac{v_0}{A_0\omega}$$

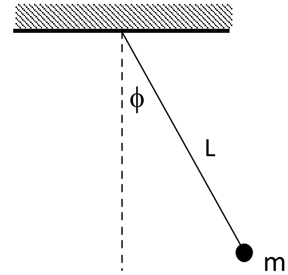
$$\phi = \operatorname{Arc}\tan\left(-\frac{v_0}{A_0\omega}\right)$$

d) finalmente

$$x = \sqrt{A_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \operatorname{Arc}\tan\left(-\frac{v_0}{A_0\omega}\right)\right)$$

Ejemplo 10.11 Un péndulo simple se forma a partir de una partícula de masa "m" ("lenteja") atada a una cuerda ideal de largo "L". Al ser liberado desde un ángulo ϕ, respecto de la posición de equilibrio, el péndulo comienza a oscilar con un periodo "T". Determine:

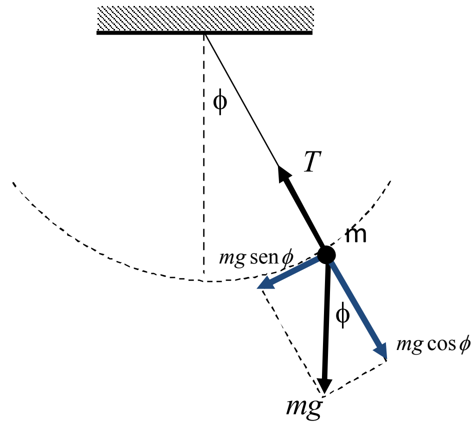
a) Una expresión para la fuerza restauradora
b) ¿Qué condición debe cumplir ϕ para que sea un MAS?
c) Frecuencia angular, el período y la frecuencia del movimiento



Solución

a) Como se muestra en la figura adjunta, las fuerzas que actúan sobre la partícula son la tensión de la cuerda y el peso, con sus componentes tangencial y normal al movimiento. La fuerza restauradora corresponde a la componente tangencial (ya que la componente normal se equilibra con la tensión)

$$F = -mg\,\text{sen}\,\phi$$



b) De acuerdo al diagrama de cuerpo libre

$$-mg\,\text{sen}\,\phi = ma$$

Para que la partícula se mueva con MAS, la fuerza restauradora debe ser proporcional al desplazamiento lo que claramente no ocurre aquí, pues la fuerza restauradora es proporcional a senϕ y no a ϕ.

Si ϕ es pequeño (menor que 10°), entonces se puede aproximar

$$\text{sen}\,\phi \approx \phi$$ [1]

Considerando además, que el arco descrito por la partícula se puede expresar como

$$x = L\phi$$

o

$$\phi = \frac{x}{L}$$

entonces la fuerza restauradora se puede escribir

$$F = -mg\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x$$

y en este caso la partícula **SI** se moverá con un MAS. Por tanto la condición pedida es: $\phi \leq 10°$

[1] Tabla de comparación de ángulos y respectivos valores de seno, coseno y tangente para esos ángulos

ϕ°	ϕ[rad]	sen ϕ	tan ϕ	cos ϕ
1	0.01745	0.01745	0.01746	0.99984
2	0.03491	0.03490	0.03492	0.99939
5	0.08727	0.08716	0.08749	0.99617
10	0.17453	0.17365	0.17633	0.98481
12	0.20944	0.20791	0.21256	0.97815

Se suele afirmar que si $\phi \leq 10°$, entonces $\phi \approx \text{sen}\,\phi \approx \tan\phi$ y $\cos\phi \approx 1$. Cuando $\phi \leq 10°$ se dice que " es pequeño"

c) En el caso de un resorte, la fuerza restauradora y la frecuencia angular están dadas por

$$F = -kx$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Comparando estas relaciones para el péndulo simple, se obtiene que

$$k = \frac{mg}{L}$$

y

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{mg}{L}}{m}}$$

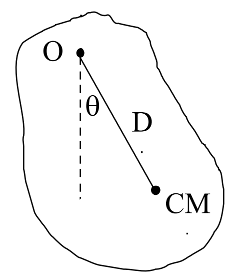
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Finalmente, su período y frecuencia son

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

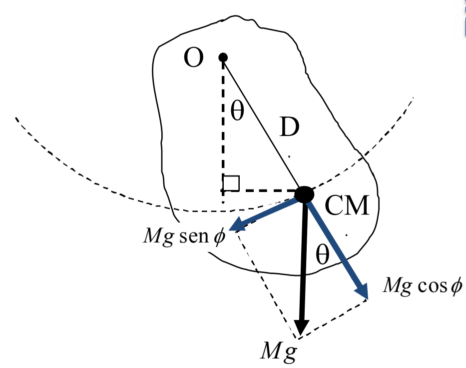
Ejemplo 10.12 Un péndulo físico se forma a partir de un sólido rígido de masa "M", que puede girar en torno a un eje que pasa por "O" que no coincida con su centro de masa. El momento de inercia del cuerpo respecto del eje de giro es "I" y la distancia entre "O" y el centro de masa es "D". Al ser liberado desde un ángulo θ, respecto de la posición de equilibrio, el péndulo comienza a oscilar con un periodo "T". Determine:



a) Una expresión para el torque restaurador
b) ¿Qué condición debe cumplir θ para que sea un MAS?
c) La frecuencia angular, el periodo y lafrecuencia del movimiento

Solución

a) Como se muestra en la figura adjunta, el peso causa un torque de restitución igual a



$$\tau = -MgD \operatorname{sen}\theta$$

b) De manera análoga al caso anterior, para que el cuerpo se mueva con un MAS, el torque restaurador debe ser proporcional a la posición angular θ, lo que no ocurre aquí pues $\tau \propto \operatorname{sen}\theta$ y no a θ. Si θ es pequeño (menor que 10°), entonces se puede aproximar

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$$

El torque restaurador se puede escribir

$$\tau = -MgD\theta$$

y la Segunda Ley de Newton para esta rotación conduce a

$$-MgD\theta = I\alpha$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + MgD\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgD}{I}\theta = 0$$

La que corresponde a la ecuación diferencial de un MAS.

c) En el caso de un resorte, la ecuación diferencial del MAS está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Comparando estas relaciones para el péndulo físico, se obtiene que

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$$

Finalmente su periodo y frecuencia son

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

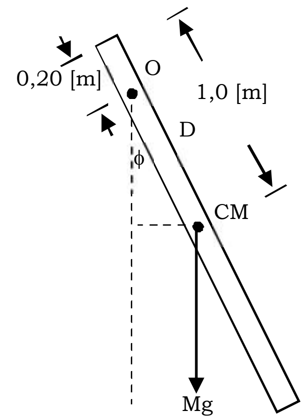
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MgD}{I}}$$

Ejemplo 10.13 Una varilla delgada se suspende de un punto ubicado a 20,0 [cm] de uno de sus extremos, de tal modo que constituye un péndulo físico. Cuando se hace oscilar con pequeña amplitud, realiza 10 oscilaciones en 23,8 [s].
Haga un esquema de la situación planteada y, sin omitir detalles, determine,:

a) El torque de restitución que actúa sobre la varilla delgada.
b) La ecuación del movimiento de la varilla (ecuación diferencial) para oscilaciones pequeñas.
c) El momento de inercia de la varilla, respecto del eje de rotación.
d) El momento de inercia de la varilla respecto de un eje que pasa por su centro de masa y que es paralelo al eje de rotación..

Masa de la varilla: 3,80 [kg]
Longitud de la varilla: 2,0 [m]

Solución



a) La magnitud del torque (τ), respecto del punto O, se puede determinar multiplicando la magnitud de la fuerza (F) por el brazo (b) de ella, con b = D sen ϕ, donde D es la distancia entre el centro de masa (CM) de la varilla y el punto O por el que pasa el eje de rotación que es perpendicular al plano de la figura. Dado que el torque es recuperador lleva signo "-" . Luego,

$$\tau_O = -\,MgD \text{ sen } \phi$$

b) Como $\tau_O = I_O\,\alpha$, se tiene que

$$-MgDsen\phi = I_O \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{MgD}{I_O} sen\phi = 0$$

Para φ pequeño, sen φ ≈ φ
y

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{MgD}{I_O}\phi = 0$$ que es la ecuación del movimiento armónico simple.

c) Se sabe que $\omega^2 = \dfrac{MgD}{I_O}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{MgD}{I_O}}$$

$$I_O = \frac{MgDT^2}{4\pi^2}$$, con $D = 1{,}00 - 0{,}20 = 0{,}80\ [m]$

Entonces, $$I_O = \frac{3{,}80\cdot 9{,}8\cdot 0{,}80\cdot 2{,}38^2}{4\pi^2}$$

$$I_O = 4{,}27\left[kg\cdot m^2\right]$$

d) El teorema de Steiner permite anotar que $I_O = I_{CM} + MD^2$

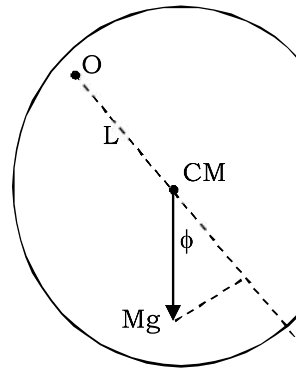
de modo que $I_{CM} = I_O - MD^2$

$$I_{CM} = 4{,}27 - 3{,}8\cdot 0{,}8^2$$

$$I_{CM} = 1{,}84\left[kg\cdot m^2\right]$$

Ejemplo 10.14 Un péndulo está constituido por una esfera sólida de radio R que se cuelga de un eje horizontal, a una distancia L = R/2 de su centro.
Determine:

a) La ecuación (diferencial) del movimiento de la esfera.
b) El período de este péndulo.
c) La longitud del péndulo simple equivalente



Solución

a) El torque neto restaurador, en torno a O es

$$\tau_0 = I_0 \alpha$$

$$-MgL \cdot sen\varphi = I_0 \alpha$$

donde

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I_0 = I_{CM} + ML^2 = \frac{2MR^2}{5} + \frac{MR^2}{4} = \frac{13MR^2}{20}$$

Al considerar que ϕ es pequeño se encuentra que

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MgL}{\frac{13MR^2}{20}}\varphi = 0, \quad \text{donde} \quad L = \frac{R}{2}$$

o

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{10g}{13R} = 0$$

b) A partir de la ecuación del movimiento de la esfera se identifica que

$$\omega^2 = \frac{10g}{13R}$$

Dado que

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{13R}{10g}}$$

A su vez, según lo pedido en el problema

$$2\pi\sqrt{\frac{13R}{10g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

y, finalmente,

$$\ell = 1,3R$$

Ejemplo 10.15 En el mundo real, los osciladores disminuyen su amplitud producto de las fuerzas de fricción si no hay algo que reponga la energía mecánica disipada. Suponga una masa “m”, un resorte de constante “k” y además de la fuerza restauradora del resorte existe una fuerza de fricción viscosa dada por

$$F = -bv$$

donde “b” es una constante que depende del medio viscoso y el signo “-“ indica que es contraria al movimiento. Determine:

a) La ecuación diferencial del movimiento
b) La solución para esta ecuación diferencial

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre “M” son la fuerza restauradora del resorte y la fuerza de fricción viscosa, la Segunda Ley de Newton se puede escribir de la forma

$$-F_{resorte} - F_{viscosa} = ma$$

$$-kx - bv = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

b) Para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal, está se puede reescribir como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

con

$$2\gamma = \frac{b}{m}$$

se supone, además que

$$x = Ce^{\alpha t}$$

es solución de la ecuación diferencial, así

$$\frac{dx}{dt} = C\alpha e^{\alpha t} \text{ y}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C\alpha^2 e^{\alpha t}$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial se tiene

$$C\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma C\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 Ce^{\alpha t} = 0$$

$$Ce^{\alpha t}\left(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right) = 0$$

Para que se cumpla la igualdad

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Entonces

$$\alpha = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\alpha = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\alpha = -\gamma \pm i\omega', \quad \text{con} \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

La solución de la ecuación diferencial se expresa como

$$x = Ce^{(-\gamma + i\omega')t} + De^{(-\gamma - i\omega')t}$$

pero

$$e^{\theta i} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$$

$$e^{-\theta i} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$$

así

$$x = Ce^{-\gamma t}\left(\operatorname{sen}\omega' t + \cos\omega' t\right) + De^{-\gamma t}\left(\operatorname{sen}\omega' t - \cos\omega' t\right)$$

$$x = e^{-\gamma t}\left[\left(C + D\right)\operatorname{sen}\omega' t + \left(C - D\right)\cos\omega' t\right]$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial se puede expresar como

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\omega' t + \phi\right)$$

Se pueden distinguir tres casos posibles para el movimiento, a saber

Caso I: $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$

El sistema no oscila y se dice que está críticamente amortiguado, la partícula vuelve lo más rápido posible a la posición de equilibrio

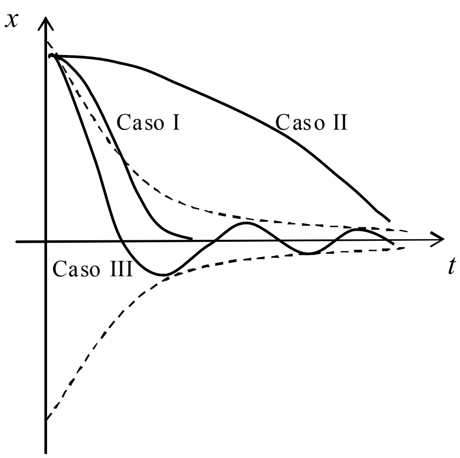
Caso II: $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$

El sistema no oscila y se dice que está sobreamortiguado, la partícula vuelve a la posición de equilibrio más lentamente

Caso III: $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$

El sistema oscila con amplitud decreciente y se dice que el sistema está subamortiguado.

En la figura adjunta se ilustran los tres casos.



Ejemplo 10.16 A un sistema masa-resorte, con masa "m", constante del resorte "k" y una fuerza de fricción viscosa igual a F=-bv, se le aplica una fuerza dependiente del tiempo y que varía periódicamente con frecuencia angular ω_d, de modo que el oscilador amortiguado pueda seguir oscilando en el tiempo (oscilación forzada), siendo la fuerza aplicada $F(t)=F_{máx}\cos(\omega_d t)$. Determine:

a) La ecuación diferencial del movimiento
b) La amplitud de la oscilación forzada
c) ¿Cuándo ocurre la resonancia?

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre "M" son la fuerza restauradora del resorte, la fuerza de fricción viscosa y la fuerza F(t), la Segunda Ley de Newton se puede escribir de la forma

$$-F_{resorte} - F_{viscosa} + F(t) = ma$$

$$-kx - bv + F_{máx}\cos\omega_d t = ma$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_{máx}\cos\omega_d t$$

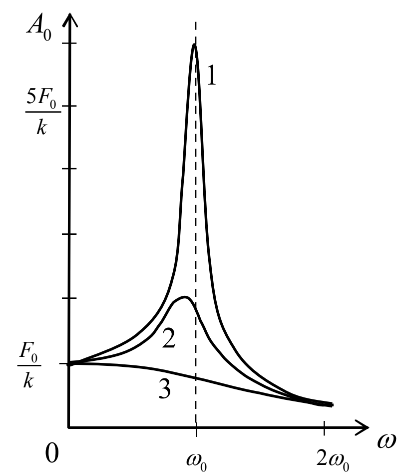
b) A partir de análisis similares a los planteados en el problema anterior, se puede expresar la amplitud de la oscilación forzada como

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{\left(k - m\omega_d^2\right)^2 + b^2\omega_d^2}}$$

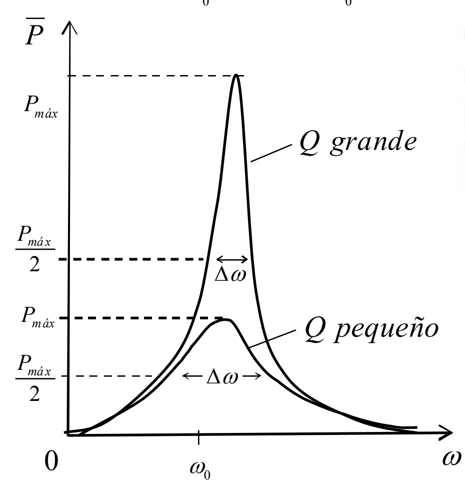
O

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + b^2\omega_d^2}}$$

c) Puesto que la amplitud de la oscilación forzada depende de la diferencia entre frecuencia de natural del sistema y la frecuencia aplicada, mientras mayor sea la diferencia entre ambas frecuencias menor será la amplitud y mientras más cercana a cero sea la diferencia mayor será la amplitud, se puede afirmar que cuando ambas frecuencias sean iguales y diferencia nula, la amplitud será máxima y se dice que el sistema está en resonancia (siempre que el amortiguamiento no sea muy grande).



En la figura se ilustran distintas respuestas para la amplitud del movimiento forzado, en función de ω con distintos valores de b, la curva 1 corresponde a un sistema ligero, la curva 2 a un sistema fuerte y 3 corresponde a un sistema sobreamortiguado.



Las características de la respuesta del sistema mostradas en la figura anterior (altura y estrechez), se pueden definir a partir de las constantes del sistema como

$$Q = \frac{m\omega_0}{b}$$

y se relaciona con en el ancho de banda Δω (rango de frecuencias) para la potencia media de la forma

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

10.4 Problemas propuestos

01) Una partícula, de masa 0,50[kg], vibra con movimiento armónico simple horizontal de 15,0[cm] de amplitud, unida a un resorte de constante 8,0[N/m]. La partícula en t=0, se encuentra en x=10,0[cm]. Determine la ecuación que representa el movimiento de la partícula de la forma Acos(ωt+ϕ), Asen(ωt+γ) y Ccosωt+Dsenωt.

R.: $0{,}15\cos\left(4t+0{,}84\right)\left[m\right]$; $0{,}15\,\mathrm{sen}\left(4t+0{,}73\right)\left[m\right]$; $\left(0{,}10\cos 4t-0{,}11\,\mathrm{sen}\,4t\right)\left[m\right]$

02) Una partícula, de masa 1,0[g], vibra con movimiento armónico simple de 2,0[mm] de amplitud. Su aceleración en el extremo de su recorrido es de $8{,}0\times10^{3}$[m/s^2]. Determine: a) la frecuencia y la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio y cuando la elongación es de 1,2[mm]; b) la fuerza que obra sobre la partícula en función de la posición.

R.: a) $\dfrac{10^{3}}{\pi}\left[Hz\right]$, $4{,}0\left[m/s\right]$, $3{,}2\left[m/s\right]$; b) $-4{,}0\times10^{3}x\left[N\right]$

03) Una partícula oscila con una frecuencia de 100[Hz] y con una amplitud de 3,0[mm]. Determine: a) velocidad y aceleración en el centro y los extremos de la trayectoria; b) la ecuación que expresa la posición (o "elongación") como función del tiempo, si la fase inicial es nula.

R.: a) $0{,}6\pi\left[m/s\right]$, 0; 0, $120\pi^{2}\left[m/s^{2}\right]$; b) $3\times10^{-3}\,\mathrm{sen}\left(2\pi\times10^{2}t\right)\left[m\right]$

04) Un movimiento armónico simple tiene una amplitud de 8,0[cm] y un período de 4,0[s]. Hallar la velocidad y la aceleración 0,50[s] después que la partícula ha pasado por el extremo de su trayectoria.

R.: $-2{,}8\pi\times10^{-2}\left[m/s\right]$; $-1{,}4\times10^{-2}\pi^{2}\left[m/s^{2}\right]$

05) Una partícula, de 0,50[kg], se mueve con MAS. Su período es de 0,15[s] y la amplitud de su movimiento es de 10[cm]. Encuentre la aceleración, la fuerza , la energía potencial y la energía cinética cuando la partícula está a 5,0[cm] de la posición de equilibrio.

R.: $-20\pi^{2}\left[m/s^{2}\right]$; $-10\pi^{2}\left[N\right]$; $0{,}25\pi^{2}\left[J\right]$; $0{,}75\pi^{2}\left[J\right]$

06) Una plancha horizontal oscila con MAS, con una amplitud de 1,5[m] y una frecuencia de 15 oscilaciones por minuto. Determine el valor mínimo del coeficiente de fricción para que un cajón colocado sobre la plancha no resbale cuando la plancha se mueve.

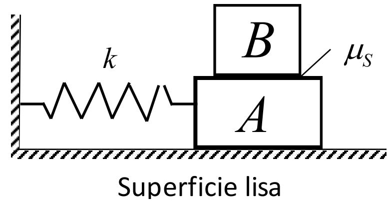
R.: 0,38

07) Una partícula de 12[kg] se fija al extremo de un resorte cuya constante de fuerza es $1{,}3\times10^{4}$[N/m]. El sistema partícula resorte se pone a oscilar en el instante t=0. La partícula oscilante está en x=0,0[cm] después de 0,015[s] y en x=-15,0[cm] después de 0.030[s]. Determine la posición de la partícula x(t)

R.: $x=0{,}32\cos\left(33t+1{,}08\right)\left[m\right]$

08) Un bloque A, de 30,0[kg], describe un MAS horizontal al deslizar sobre una superficie sin roce, con una frecuencia de 1,50[Hz]. Un bloque B descansa sobre él, sin resbalar, siendo el coeficiente de fricción estática entre ambos de 0,600. Halle la máxima amplitud de oscilación del sistema para que el bloque B no deslice.

R.: 6,6[cm]

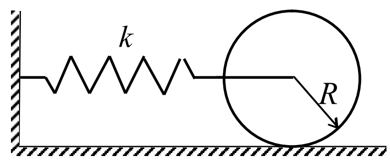


09) un péndulo físico está constituido por un recorte de una plancha de cierto material indeformable, de 2,20[kg]. El efectúa un MAS con una frecuencia de 0,450[Hz]. Si el centro de suspensión (pivote) se localiza a 0,350[m] del centro de masa, determine el momento de inercia del péndulo.

R.: 0,94[kg·m²]

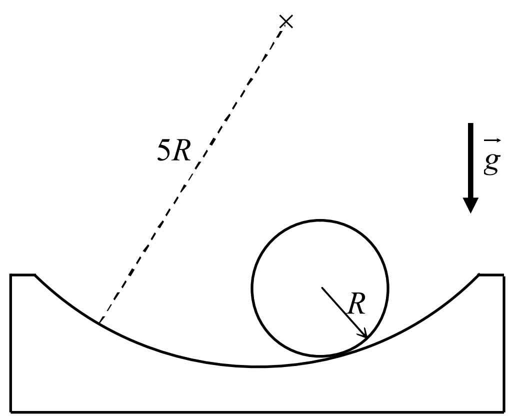
10) Una esfera homogénea, de masa M y radio R, está unida a un resorte de constante de fuerza k y rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Determine el período de oscilación del sistema.
(Sugerencia: recuerde que la energía mecánica total E es constante para un sistema conservativo y, por tanto *dE/dt=0*)

R.: $2\pi\sqrt{\dfrac{7M}{5k}}$



11) Una esfera maciza y homogénea, de masa M y radio R, rueda sin resbalar en un canal cilíndrico de radio 5R. El plano vertical que contiene la trayectoria de la esfera es perpendicular al eje de simetría del canal. Demuestre que para pequeños desplazamientos, considerados desde el punto de equilibrio, la esfera tiene un MAS con período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$$



Referencias bibliográficas
Para saber más acerca de los contenidos propios de un primer curso de Física Mecánica, se recomienda la consulta de algunos de los siguientes textos de nivel universitario.

1. BLATT, F.J. (1991). Fundamentos de Física. Prentice Hall-Hispanoamérica, S.A. México

2. BURBANO DE ERCILLA, S., BURBANO, E., GRACIA, C. (2005). Problemas de Física. Alfa Omega Grupo Editor, S.A. de C.V. México.

3. BURBANO DE ERCILLA, S., BURBANO, E., GRACIA, C. (2006). Física General. Alfa Omega Grupo Editor, S.A. de C.V. México.

4. FISHBANE, P., GASIOROWICZ, S., THORNTON, S. (1994). Física para Ciencias e Ingeniería. Prentice-Hall Hispanoamérica, S.A. México

5. LANE, R. (2002). Física Universitaria. International Thomson Editores S.A. de C. V. México.

6. LEA, S., BURKE, J. (1999). Física: La Naturaleza de las Cosas. International Thomson Editores S.A. de C. V. México.

7. RESNICK, R., HALLIDAY, R. (1961). Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Compañía Editorial Continental. México.

8. RESNICK, R., HALLIDAY, R., KRANE, K. (1993). Física. CECSA. México.

9. SAAVEDRA, I. (1978). TIEMPO, ESPACIO, MOVIMIENTO Los *principia* de Newton. Editorial Universitaria. Chile.

10. SEARS, F., ZEMANSKY, M. YOUNG, H., FREEDMAN, R. (1999). Física Universitaria. Addison Wesley Longman de México, S. A. de C.V. México

11. SERWAY, R. A. (1997). Física. McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V. México.

12. SERWAY, R. A., BEICHNER, R.J. (2002). Física para Ciencias e Ingeniería. McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V. México.

13. TIPLER, P. A. (1999). Física para la Ciencia y la Tecnología. Editorial Reverté, S.A. España.