

Estudio de un modelo depredador-presa con tres especies y capacidad de carga variable

Study of a predator-prey model with three species and variable carrying capacity

Wilson Mejías Caballero¹

¹ *Instituto Forestal, Santiago, Chile*

Fecha de recepción del manuscrito: 04/04/2023

Fecha de aceptación del manuscrito: 21/04/2023

Fecha de publicación: 28/04/2023

Resumen— Esta investigación se centró en el estudio de un ecosistema en el que coexisten dos depredadores, *Puma concolor* y *Lycalopex culpaeus*, los cuales compiten por presas en común. En este modelo también se considera que el puma depreda al Zorro culpeo, lo que agrega una dinámica adicional al sistema. Se utilizaron ecuaciones diferenciales para modelar la interacción entre estas tres especies, considerando la capacidad de carga variable de las presas y suponiendo que no hay migración ni depredación externa. Se realizaron 256 simulaciones utilizando diferentes valores de parámetros, y se encontraron diversos escenarios donde se produjo la extinción de ambas especies depredadoras, la extinción exclusiva del Puma o del Zorro culpeo, y situaciones en las que el crecimiento excesivo de un depredador llevó a la disminución de la población de presas y, por lo tanto, a la extinción del sistema completo. Los resultados mostraron que la tasa de consumo de los depredadores es uno de los factores que más regula el comportamiento del sistema. También se observó que el cambio en la tendencia de la capacidad de carga afectó las densidades máximas de presas que se pudieron lograr.

Palabras clave—Predador-presa, Respuesta Funcional, Capacidad de carga, Simulaciones numéricas, *Puma concolor*, *Lycalopex culpaeus*

Abstract—This research focused on the study of an ecosystem in which two predators, *Puma concolor* and *Lycalopex culpaeus*, coexist and compete for common prey. This model also includes that the Puma preys on the Culpeo fox, which adds dynamic to the system. Differential equations were used to model the interaction between these three species, considering the variable carrying capacity of prey and assuming no migration or external predation. 256 simulations were performed using different parameter values, and various scenarios were found where both predator species became extinct, exclusive extinction of either the Puma or the Culpeo fox occurred, and situations where the excessive growth of a predator led to a decrease in prey population and therefore extinction of the entire system. The results showed that the consumption rate of predators is one of the factors that most regulate the system's behavior. It was also observed that the change in the trend of carrying capacity affected the maximum densities of prey that could be achieved.

Keywords—Prey-predator, Functional response, Carrying capacity, Numerical simulations, *Puma concolor*, *Lycalopex culpaeus*

INTRODUCCIÓN

La competencia interespecífica se refiere a la interacción entre individuos de diferentes especies que compiten por los mismos recursos limitados en un mismo hábitat o ecosistema (Kites, 2022). El modelamiento matemático de competencia entre especies tiene sus orígenes en el modelo de Lotka–Volterra desarrollado por la década de 1920.

Es posible encontrar una serie de publicaciones científicas y estudios recientes relacionados a la temática de modelos

predador-presa, donde destacan temas como el análisis de los patrones temporales en función de distintas respuestas funcionales (Majumdar et al., 2022; Naik et al., 2022a; Jana y Kumar Roy, 2022; Barman y Ghosh, 2022) y el análisis del “Efecto Alle” y del “Efecto miedo” en las presas (Li et al., 2022; Naik et al., 2022b; Devi y Jana, 2022; Lan et al., 2022; Gökçe, 2022).

Otro tipo de estudios han modelado la interacción de más de dos especies en un ecosistema. En el estudio de Pang y Wang (2004) se analizaron las características de un

ecosistema formado por dos predadores que compiten por la misma presa. Por otro lado, también se han investigado modelos que incluyen la cooperación entre dos presas para protegerse de un predador en común (Kundu y Maitra, 2018).

Capacidad de carga variable

El concepto de capacidad de carga de un ecosistema se refiere a la cantidad máxima de individuos de una especie que puede sostener un ecosistema o un hábitat determinado de manera sostenible a largo plazo, sin agotar los recursos naturales y sin causar daños irreparables al medio ambiente. En el estudio de Al-Moqbali et al. (2018) se propone un modelo predador- presa que incorpora una ecuación que describe los cambios en el tiempo de la capacidad de carga del ecosistema. Esta se define como:

$$\frac{dk}{dt} = \alpha(k(t) - k_1) \left(1 - \frac{k(t) - k_1}{K_2}\right), \quad (1)$$

donde k es la capacidad de carga que aumenta sigmoidalmente entre un valor inicial k_0 mayor a k_1 y un valor final $k_1 + k_2$ con una tasa de crecimiento α .

Respuestas Funcionales

La respuesta funcional es la relación entre la tasa de depredación (Presas/tiempo) y la densidad de presas (Smith y Smith, 2007). Holling (1965) tipificó las respuestas funcionales en tres clases diferentes:

Tipo I: Esta respuesta funcional se basa en el supuesto de que el cambio en la densidad de la población de predadores es proporcional a la densidad de la población de presas disponible (x). La expresión matemática asociada a esta respuesta corresponde a

$$h(x) = \begin{cases} \gamma x & \text{si } 0 \leq x < c \\ \gamma c & \text{si } c > x, \end{cases}$$

donde x es la densidad de presas. Se puede entender que existe un aumento lineal de consumo de los predadores respecto a la densidad de población de presas, llegando a un punto donde este valor es constante (Ej: fitoplancton y zooplancton).

Tipo II: En este tipo de respuesta el número de presas consumidas por el predador se incrementa pero con una tasa decreciente, en función del incremento de la densidad de la presa (Badii et al., 2013). Es la llamada respuesta Monod de tipo hiperbólica, donde el parámetro γ es la tasa máxima de consumo per cápita y a es la tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo (Garay-Gonzales, 2020). El modelo que describe este comportamiento es

$$h(x) = \frac{\gamma x}{a + x}.$$

Tipo III: Los predadores con este tipo de respuesta tienen una dieta basada en distintas especies de presas y su consumo es proporcional a sus abundancias, cambiando a las especies más abundantes y por tanto, permiten que las especies

con menor densidad poblacional tengan oportunidad de incrementar sus poblaciones de nuevo (Badii et al., 2013). Es una respuesta sigmoidal que incluye la característica de que los predadores son ineficientes cuando los niveles de presas son bajos, y descrita por Al-Moqbali et al. (2018). Su ecuación matemática corresponde a

$$h(x) = \frac{\gamma x^2}{a^2 + x^2},$$

donde γ y a tienen el mismo sentido ecológico que en la respuesta funcional tipo II.

El Puma

El *Puma concolor*, también conocido como león de montaña o cougar, es una especie de felino nativo de América. En Chile, es uno de los grandes depredadores de los ecosistemas de montaña y es considerado un símbolo nacional de la conservación de la biodiversidad (Toledo y Surot, 2003). A pesar de su importancia ecológica, el *Puma concolor* enfrenta numerosas amenazas en Chile, incluyendo la caza ilegal, la pérdida de hábitat y la disminución de sus presas naturales (Ríos, 2009; Bonacic, 2013). La madurez sexual de las hembras se alcanza alrededor de los dos años, mientras que en los machos esta se da al final de los tres años y el periodo de gestación de las crías es de entre 90 y 95 días, teniendo camadas de entre dos y tres individuos cada dos años (Toledo y Surot, 2003). Estudios previos han estimado la densidad de pumas en distintas zonas del país, estando estas en un rango de entre 0,75 y 6 individuos por 100 kilómetros cuadrados (Guarda et al., 2017; Bonacic, 2013). Este carnívoro tiene dentro de sus presas más comunes alces, ciervos, venados, castores, ardillas, marmotas, lauchas, ratones, conejos, liebres y jabalíes, pero en Chile depreda particularmente lagomorfos (Conejos) y camélidos (Vicuña y guanacos), aunque también hay evidencia de que consume otros carnívoros de menor tamaño como la especie *Lycalopex culpaeus*, mejor conocido como Zorro culpeo (Toledo y Surot, 2003; Pacheco et al., 2004).

Zorro culpeo

El zorro culpeo (*Lycalopex culpaeus*) es una especie de cánido que se encuentra ampliamente distribuida en el Neotrópico, habitando a lo largo de la cordillera de Los Andes desde Colombia hasta Tierra del Fuego (Zúñiga y Fuenzalida, 2016). Esta especie se describe comúnmente como una especie adaptable y generalista que puede adaptarse a cambios en su entorno tanto en términos de su alimentación como de su hábitat (Guntiñas Rosado et al., 2018). Se ha estudiado que en la zona centro-sur de Chile su dieta se compone de distintos tipos de roedores y lagomorfos, aunque en menor medida también consume aves y algunos reptiles de menor tamaño (Zúñiga y Fuenzalida, 2016). Los resultados de diversas investigaciones realizadas en Chile y Argentina, muestran que la densidad de zorros varía significativamente entre las distintas regiones estudiadas y oscila entre 0,2 y 2,6 individuos por kilómetro cuadrado, dependiendo del área y del método utilizado para su medición (MMA, 2020). Las hembras son monoéstricas, con un periodo de gestación de 65 días, mientras el número de crías varía entre 3 y 5 individuos que alcanzan la madurez sexual al año de edad

(Amster, 2009).

En el presente trabajo se estudian las características de un modelo matemático que representa un ecosistema conformado por un depredador dominante (Puma), un depredador intermedio (Zorro culpeo) y una presa, que tiene asociada una capacidad de carga variable y que asocia respuestas funcionales Holling Tipo II y III a los predadores.

EL MODELO MATEMÁTICO

Para este estudio se considera un ecosistema en donde existe un predador clava o dominante (Puma) y un predador secundario (Zorro culpeo), los cuales consumen a presas en común. En situaciones donde las presas sean escasas, el predador dominante puede consumir al predador secundario. Este comportamiento se puede regular asignando una respuesta funcional del tipo II al predador dominante y una respuesta funcional Tipo I al secundario. Para las presas se asocia un crecimiento de tipo logístico y la capacidad de carga será variable y se modelará con la ecuación 1. Así formulamos el siguiente modelo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_1 \left(\frac{\gamma_1 z(t)^2}{a_1^2 + z(t)^2} \right) x(t) + \alpha_1 \left(\frac{\gamma_2 y(t)^2}{a_2^2 + y(t)^2} \right) x(t) - \beta_1 x(t) \\ \frac{dy}{dt} = \alpha_2 \left(\frac{\gamma_3 z(t)}{a_3 + z(t)} \right) y(t) - \left(\frac{\gamma_2 y(t)^2}{a_2^2 + y(t)^2} \right) x(t) - \beta_2 y(t) \\ \frac{dz}{dt} = \alpha_3 \left(1 - \frac{z(t)}{k(t)} \right) z(t) - \left(\frac{\gamma_1 z(t)^2}{a_1^2 + z(t)^2} \right) x(t) - \left(\frac{\gamma_3 z(t)}{a_3 + z(t)} \right) y(t) \\ \frac{dk}{dt} = \alpha_4 (k(t) - k_1) \left(1 - \frac{k(t) - k_1}{k_2} \right), \end{cases} \quad (2)$$

donde $x(t)$ es la densidad del Puma en un instante t , $y(t)$ es la densidad del Zorro culpeo en un instante t , $z(t)$ es la densidad de la presa en un instante t , $k(t)$ es la capacidad de carga en un instante t , α_1 es la tasa de reproducción del Puma, donde α_2 es la tasa de reproducción del Zorro culpeo, donde α_3 es la tasa de reproducción de la presa, α_4 es la tasa de crecimiento de la capacidad de carga, γ_1 es la tasa máxima de consumo per cápita del Puma con la presa, γ_2 es la tasa máxima de consumo per cápita del Puma con el Zorro culpeo, γ_3 es la tasa máxima de consumo per cápita del Zorro culpeo con la presa, a_1 es la constante de saturación del Puma con la presa, a_2 es la constante de saturación del Puma con el Zorro culpeo, a_3 es la constante de saturación del Zorro culpeo con la presa, β_1 es la tasa de mortalidad del Puma, β_2 es la tasa de mortalidad del Zorro culpeo y $k_1 + k_2$ es el valor final de capacidad de carga.

Este modelo asume que las poblaciones interactúan entre sí y con el ambiente según las ecuaciones diferenciales que se presentan. También se supone que las tasas y parámetros son constantes en el tiempo y que no hay migración ni depredación externa.

Discusión acerca del modelo a priori

El sistema descrito en (2) representa un modelo que se ajusta a las características ecológicas del Puma y del Zorro culpeo, debido a que considera sus hábitos predatorios en su formulación. Al evaluar su credibilidad con base en los

atributos propuestos por Berryman et al. (1995), se observa que el sistema (2) cumple en su mayoría con estos requisitos. Destacamos que el modelo, al incluir una ley dinámica para la capacidad de carga, considera un ambiente variable para las especies.

No obstante, sería recomendable personalizar aún más el modelo considerando variables adicionales, como el tamaño y periodo de gestación de cada especie, así como incluir factores en la ley dinámica de la capacidad de carga que aborden los efectos antropogénicos que afectan a las especies.

SIMULACIONES NUMÉRICAS

Utilizando los parámetros presentados en la Tabla 1 se realizaron 256 simulaciones para el modelo del sistema 2. Para resolver estas ecuaciones se utilizó la librería DeSolve del programa R (Soetaert et al., 2015) y las gráficas se implementaron con las librerías ggplot (Wickham et al., 2016) y plotly (Sievert, 2020). Los valores iniciales de las variables fueron $x(t) = 3$ individuos por 100 km², $y(t) = 3$ individuos por 100 km², $z(t) = 300$ individuos por 100 km² y $k(t) = 300$ individuos por 100 km². La unidad considerada para el tiempo fueron meses, transcurriendo 500 meses en las simulaciones. Las gráficas de las densidades de cada especie fueron realizadas en escala logarítmica ($\log(x + 1)$), debido a las diferencias en las magnitudes numéricas de las abundancias.

TABLA 1: PARÁMETROS UTILIZADOS EN LA SIMULACIONES DE MODELO 2

Parámetros para simulaciones	Definición	Valores
α_1	Tasa de reproducción Puma	0.1; 0.3
α_2	Tasa de reproducción Z. culpeo	0.3; 0.6
α_3	Tasa de reproducción presa	0.5
α_4	Tasa de crecimiento capacidad de carga	0.01
γ_1	Tasa máxima consumo per cápita Puma-presa	0.4; 0.8
γ_2	Tasa máxima consumo per cápita Puma-Z. culpeo	0.01; 0.03
γ_3	Tasa máxima consumo per cápita Z. culpeo-presa	0.2; 0.8
a_1	Constante de saturación Puma-presa	0.4
a_2	Constante de saturación Puma-Z. Culpeo	0.9
a_3	Constante de saturación Z. Culpeo-presa	0.9
β_1	Tasa de mortalidad Puma	0.2; 0.3
β_2	Tasa de mortalidad Z. culpeo	0.05; 0.15
k_1	Parámetro capacidad carga	200
k_2	Parámetro capacidad carga	20; 150

La simulación de diferentes combinaciones de parámetros es un proceso computacionalmente costoso, y agregar nuevos valores incrementa exponencialmente la cantidad de ciclos que el programa debe ejecutar. Por esta razón se optó por variar únicamente aquellos parámetros que, luego de una inspección previa, se determinaron como los más significativos para generar diversos tipos de soluciones. Esta estrategia permitió reducir los tiempos de simulación sin afectar la calidad de los resultados obtenidos.

Entre los resultados arrojados por las simulaciones, destacan diversos escenarios donde se produce la extinción de ambos depredadores, la extinción exclusiva del Puma, así como también la extinción de Z. culpeo. Además, se observaron simulaciones en las cuales el crecimiento excesivo de un depredador resultó en la disminución de la población de

presas, lo que a su vez llevó a la extinción del sistema en su totalidad. Se pudo apreciar el efecto de la capacidad de carga variable, analizando soluciones donde esta variable aumenta o disminuye. A continuación, se presentan los escenarios más relevantes generados en las simulaciones.

Extinción Predadores

Estas simulaciones se caracterizan por tener valores de los parámetros γ bajos, por lo que los predadores no alcanzan a asimilar una cantidad de biomasa necesaria de las presas que permita sostener su población en el tiempo. En la Figura 1 se aprecia como las densidades de predadores van disminuyendo paulatinamente hasta alcanzar la extinción. Dicha situación se repite cuando la capacidad de carga va aumentando en la Figura 4.

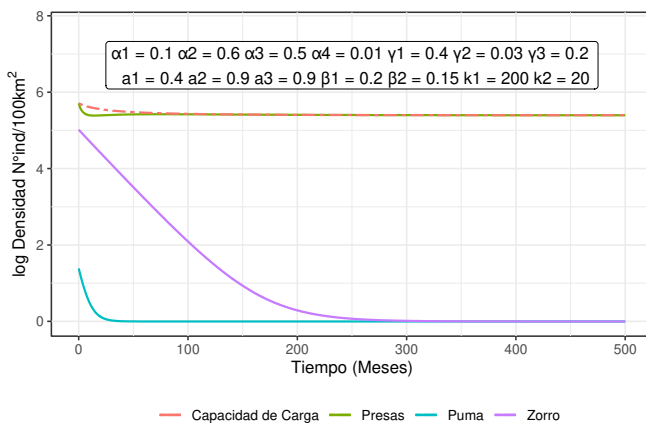


Figura 1: Simulación extinción predadores con K decreciente

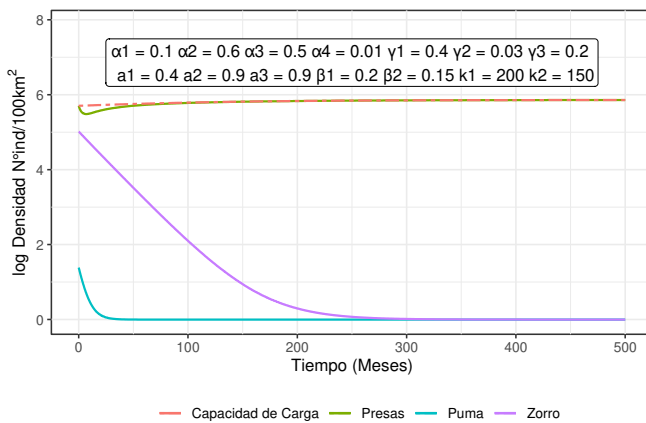


Figura 2: Simulación extinción predadores con K creciente

Las trayectorias de las Figuras 3 y 4 muestran la variación en el tiempo de las densidades de predadores y presas.

Extinción Puma

Las soluciones encontradas surgieron a partir de la asociación de una alta tasa de consumo a Z. culpeo ($\gamma_3 = 0,8$), lo cual posibilitó el mantenimiento de la población de zorros

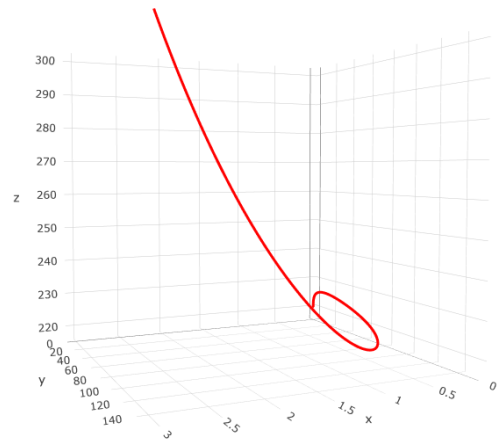


Figura 3: Trayectoria extinción predadores con K decreciente

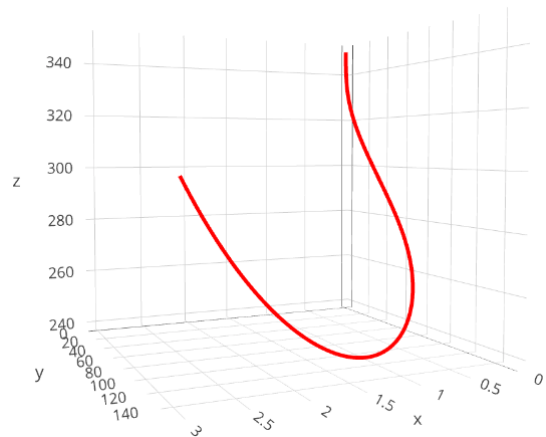


Figura 4: Trayectoria extinción predadores con K creciente

en el tiempo. Como consecuencia, la población de pumas no pudo subsistir. La interacción entre las densidades de Z. culpeo y las presas se muestra en la Figura 5, y se observa también cuando la capacidad de carga aumenta (Figura 6).

Comparando las trayectorias de las Figuras 7 y 8 se aprecia como al estar la capacidad de carga en alza las presas son capaces de tener mayores densidades.

Extinción Zorro culpeo

La extinción de *L. culpaeus*, se asocia a su baja tasa de consumo y a la proliferación de los Pumas. Bajo estas condiciones, se puede apreciar que se genera una retroalimentación entre las densidades de *P. concolor* y sus presas, independiente de la tendencia de la capacidad de carga. Este fenómeno se ilustra en las Figuras 9 y 10.

El cambio de tendencia en la capacidad de carga influye en las densidades máximas de presas que se pueden lograr, pasando de 250 individuos por km² a 350 individuos por km² (Figuras 11 y 12)

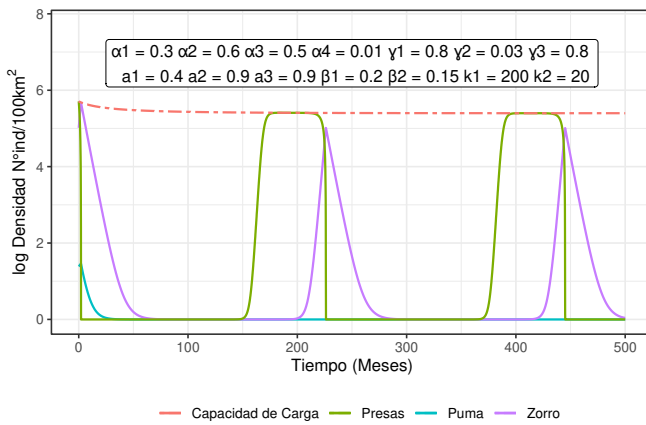


Figura 5: Simulación extinción Puma con K decreciente

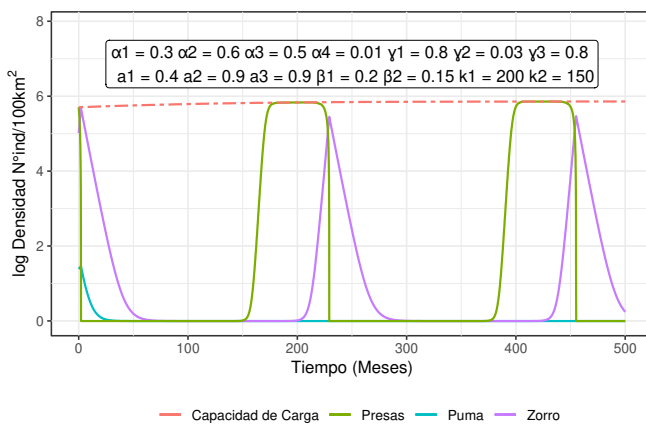


Figura 6: Simulación extinción Puma con K creciente

CONCLUSIONES

El comportamiento del sistema ecológico estudiado es altamente dinámico y depende en gran medida de los valores de los parámetros involucrados, especialmente de las tasas de consumo de los depredadores y de la capacidad de carga variable de las presas. Se observa que el aumento en la capacidad de carga puede permitir la recuperación de las poblaciones de presas y, por ende, de los depredadores, siempre y cuando se mantenga un equilibrio adecuado entre ellos. Además, se evidencia que la desaparición de un depredador puede tener un efecto dominante sobre el otro y sobre el ecosistema en general.

Los resultados de este estudio son consistentes con los obtenidos por Al-Moqbali et al. (2018), donde la capacidad de carga variable genera cambios en las oscilaciones de las densidades de predadores y presas antes de que el sistema llegue al punto de equilibrio. Así mismo, fue posible validar la mayoría de los criterios de credibilidad de modelos predador-presa definidos en Berryman et al. (1995).

Es importante señalar que los resultados de este estudio reflejan el principio de exclusión competitiva, lo que significa que no fue posible detectar una solución en donde ambos predadores del sistema coexistieran sin excluirse. Aunque estos resultados están en línea con la ecología de

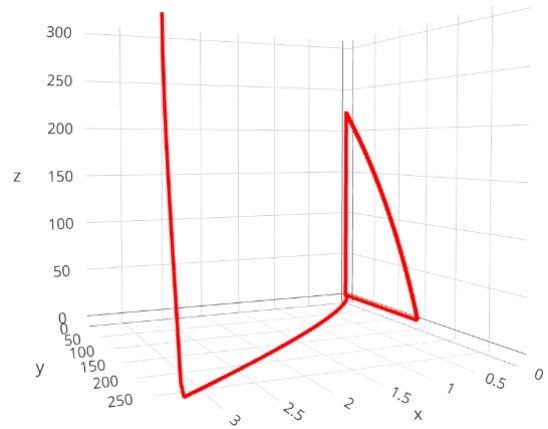


Figura 7: Trayectoria extinción Puma con K decreciente

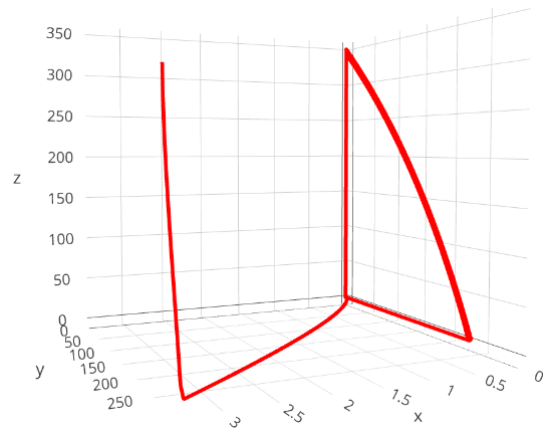


Figura 8: Trayectoria extinción Puma con K creciente

poblaciones, también indican la necesidad de ajustar (2) para permitir estados de coexistencia entre las especies predatoras.

El estudio presentado proporciona información sobre la dinámica de poblaciones en un ecosistema complejo. Aunque es importante destacar que las simulaciones son un modelo simplificado de la realidad y que no se consideran todas las variables que podrían influir en el comportamiento del sistema. Por lo tanto, los resultados obtenidos deben ser interpretados con precaución. Sin embargo, sirven como una base sólida para futuras investigaciones y para la toma de decisiones en la conservación de especies y hábitats.

Es relevante considerar que agregar nuevas variables al modelo y tener en cuenta la tasa de deterioro de la capacidad de carga debido a cambios en el uso de suelos, puede ser un trabajo futuro interesante y pertinente para aplicar la metodología utilizada en este estudio. Con esto, se podrían obtener resultados más precisos que ayuden a mejorar la comprensión y manejo de los ecosistemas en cuestión.

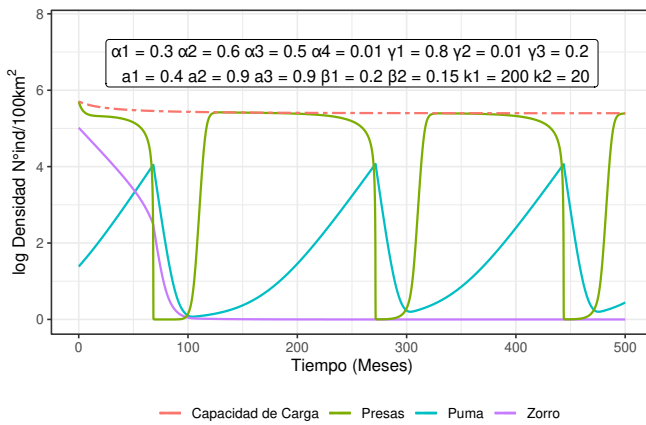


Figura 9: Simulación extinción Z. culpeo con K decreciente

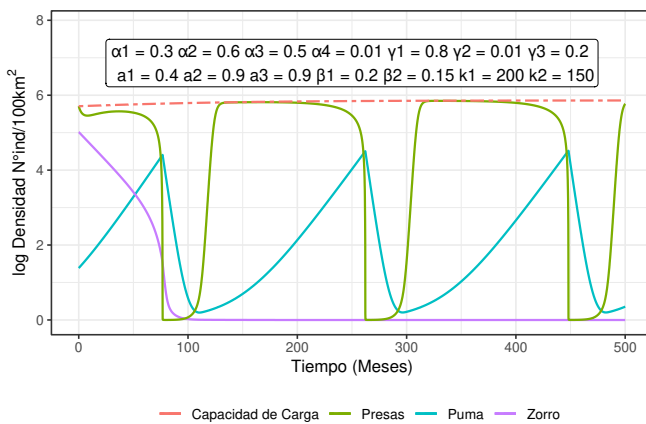


Figura 10: Simulación extinción Z. culpeo con K creciente

BIBLIOGRAFÍA

[1] Al-Moqbali, M. K., Al-Salti, N. S., y Elmojtaba, I. M. (2018). “Prey–predator models with variable carrying capacity”. *Mathematics*, 6(6):102.

[2] Amster, P. (2009). *Guía de Campo de los Mamíferos de Chile*. Ediciones Flora y Fauna Chile Ediciones, Santiago, Chile.

[3] Badii, M., Landeros, J., Rodríguez, H., Cerna, E., Valenzuela, J., y Ochoa, Y. (2013). “Algunos aspectos de depredación some aspects of predation”. *Daena: International Journal of Good Conscience*, 8(1):148–158.

[4] Barman, B. y Ghosh, B. (2022). “Role of time delay and harvesting in some predator–prey communities with different functional responses and intra-species competition”. *International Journal of Modelling and Simulation*, 42(6):883–901.

[5] Berryman, A. A., Gutierrez, A. P., y Arditi, R. (1995). “Credible, parsimonious and useful predator-prey models: a reply to abrams, gleeson, and sarnelle”. *Ecology*, pp. 1980–1985.

[6] Bonacic, C. (2013). “Ecología y relación con el ser humano de puma concolor en la reserva nacional río los cipreses y zonas aledañas”. *SANTIAGO*, 14:05.

[7] Devi, N. V. y Jana, D. (2022). “The role of fear in a time-variant prey–predator model with multiple delays and alternative food source to predator”. *International Journal of Dynamics and Control*, 10(2):630–653.

[8] Garay-Gonzales, E. O. (2020). *Modelo matemático depredador–presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo*. Facultad de ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

[9] Gökçe, A. (2022). “A dynamic interplay between allee effect and time delay in a mathematical model with weakening memory”. *Applied Mathematics and Computation*, 430:127306.

[10] Guarda, N., Gálvez, N., Leichtle, J., Osorio, C., y Bonacic, C. (2017). “Puma puma concolor density estimation in the mediterranean andes

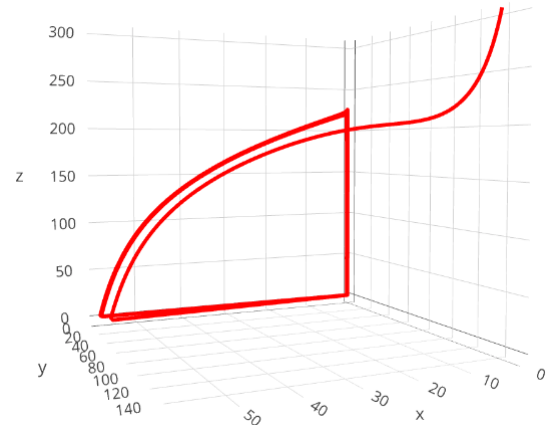


Figura 11: Trayectoria extinción Z. culpeo con K decreciente

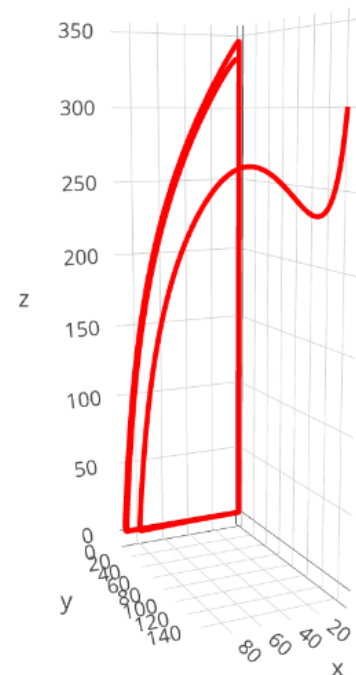


Figura 12: Trayectoria extinción Z. culpeo con K creciente

of chile”. *Oryx*, 51(2):263–267.

[11] Guntiñas Rosado, M. et al. (2018). “El lobo de páramo (lycalopex culpaeus): ecología trófica y patrones de abundancia.”

[12] Holling, C. S. (1965). “The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation”. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 97(S45):5–60.

[13] Jana, A. y Kumar Roy, S. (2022). “Holling-tanner prey-predator model with beddington-deangelis functional response including delay”. *International Journal of Modelling and Simulation*, 42(1):86–100.

[14] Kitzes, J. (2022). *Handbook of Quantitative Ecology*. University of Chicago Press.

[15] Kundu, S. y Maitra, S. (2018). “Dynamical behaviour of a delayed three species predator–prey model with cooperation among the prey species”. *Nonlinear Dynamics*, 92:627–643.

[16] Lan, Y., Shi, J., y Fang, H. (2022). “Hopf bifurcation and control of a fractional-order delay stage structure prey-predator model with two fear effects and prey refuge”. *Symmetry*, 14(7):1408.

[17] Li, Y. X., Liu, H., Wei, Y. M., Ma, M., Ma, G., y Ma, J. Y. (2022). “Population dynamic study of prey-predator interactions with weak allee effect, fear effect, and delay”. *Journal of Mathematics*, 2022.

[18] Majumdar, P., Debnath, S., Sarkar, S., y Ghosh, U. (2022). “The complex dynamical behavior of a prey-predator model with holling type-iii functional response and non-linear predator harvesting”. *International Journal of Modelling and Simulation*, 42(2):287–304.

- [19] MMA *Inventario nacional de especies de Chile*. title. Accedido en 12-04-2023, <http://especies.mma.gob.cl/CNMWeb/Web/WebCiudadana/Default.aspx>.
- [20] Naik, P. A., Eskandari, Z., Avazzadeh, Z., y Zu, J. (2022a). “Multiple bifurcations of a discrete-time prey–predator model with mixed functional response”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 32(04):2250050.
- [21] Naik, P. A., Eskandari, Z., Yavuz, M., y Zu, J. (2022b). “Complex dynamics of a discrete-time bazykin–berezovskaya prey–predator model with a strong allee effect”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 413:114401.
- [22] Pacheco, L. F., Lucero, A., y Villca, M. (2004). “Dieta del puma (puma concolor) en el parque nacional sajama, bolivia y su conflicto con la ganadería”. *Ecología en Bolivia*, 39(1):75–83.
- [23] Pang, P. Y. y Wang, M. (2004). “Strategy and stationary pattern in a three-species predator–prey model”. *Journal of Differential Equations*, 200(2):245–273.
- [24] Ríos, L. (2009). *Análisis de los problemas que amenazan la conservación de Puma concolor en la Araucanía*. Facultad de Ciencias Forestales, Universidad de Chile.
- [25] Sievert, C. (2020). *Interactive Web-Based Data Visualization with R, plotly, and shiny*. Chapman and Hall/CRC.
- [26] Smith, T. M. y Smith, R. L. (2007). *Ecología*. Pearson Educación.
- [27] Soetaert, K., Petzoldt, T., Setzer, R. W., y Petzoldt, M. T. (2015). “Package ‘desolve’”. *Solving Initial Value Differential Equations, 2010d. deSolve vignette-R package version*, 1.
- [28] Toledo, V. y Surot, D. (2003). “El puma, un habitante chileno”. *TecnoVet*, 9(1):29–31.
- [29] Wickham, H., Chang, W., y Wickham, M. H. (2016). “Package ‘ggplot2’”. *Create elegant data visualisations using the grammar of graphics. Version*, 2(1):1–189.
- [30] Zúñiga, A. H. y Fuenzalida, V. (2016). “Dieta del zorro culpeo (*Lycalopex culpaeus molina* 1782) en un área protegida del sur de Chile”. *Mastozoología neotropical*, 23(1):201–205.