

# TRILOGÍA

CIENCIA · TECNOLOGÍA · SOCIEDAD

## ARTÍCULOS

### ■ PRESENTACIÓN

#### > ESTUDIO DE CASO EN EDUCACIÓN

- IMPLEMENTACIÓN DE METODOLOGÍA DE EXPERIENCIA DE USUARIO A TRAVÉS DEL DISEÑO MULTISENSORIAL

#### > ARTÍCULO

- PROCESO DE BIOBASADO DE LA CÁSCARA DE NUEZ. BIONUT

#### > ARTÍCULO

- CONTROL DE CALIDAD POR MEDIAS MÓVILES PONDERADAS EXPONENCIALMENTE PARA VARIABLES CUALITATIVAS

#### > NOTA TÉCNICA

- SOBRE EL RELATIVE STRENGTH INDEX (RSI) Y EL MOVING AVERAGE CONVERGENCE-DIVERGENCE (MACD) EN EL TRADING DE ACTIVOS DE RIESGO

#### > RESEÑA

- ELEMENTOS DE HISTORIA Y ECONOMÍA AGROINDUSTRIAL

#### Dossier Trilogía:

ARQUITECTURA Y ESTUDIOS URBANOS (TEMAS ACTUALES):  
TERRITORIO, ESPACIO Y SOCIEDAD.

#### > ENSAYO

- EL TRABAJO VISIBLE. LAS INFRAESTRUCTURAS RESIDENCIALES Y LA ARTICULACIÓN DE LO MATERIALMENTE COLECTIVO

#### > COMUNICACIÓN BREVE

- NUESTROS RÍOS: ENTRE EL EXTRACTIVISMO Y EL ESPACIO PÚBLICO

#### > ARTÍCULO

- MUSEOGRAFÍA DE LOS RELATOS FEMENINOS DE LA DICTADURA EN CHILE. ANÁLISIS ESPACIAL Y SENSORIAL DE LA OBRA 'LAS ARPILLERAS'

#### > ARTÍCULO

- CIUDADES NÓMADES. EL LEGADO DE RON HERRON EN EL SIGLO XXI

#### > ENTREVISTA

- EL PROYECTO COMO DISCIPLINA. CONVERSACIÓN CON NIEVES BALBONTÍN GUBBINS, DIRECTORA DE LA ESCUELA DE ARQUITECTURA UTEM ENTRE 2008 Y 2018

#### > ESTUDIO DE CASO

- FRAGMENTACIÓN SOCIAL Y GENTRIFICACIÓN: NUEVOS ESPACIOS DE CONSUMO EN BARRIO SANTA ISABEL, SANTIAGO.



UTEM

UNIVERSIDAD  
TECNOLÓGICA  
METROPOLITANA

del Estado de Chile

DICIEMBRE 2023 /  
JULIO 2024

Vol. 39 · Nº 50

**Rolly Buccioni Vadulli\***

Universidad Tecnológica Metropolitana,  
Santiago, Chile

**Pedro Vergara Vera\*\***

Universidad Tecnológica Metropolitana,  
Santiago, Chile



<https://orcid.org/0000-0001-5914-8251>

## Artículo

# CONTROL DE CALIDAD POR MEDIAS MÓVILES PONDERADAS EXPONENCIALMENTE PARA VARIABLES CUALITATIVAS

QUALITY CONTROL BY EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGES FOR QUALITATIVE VARIABLES

Recibido: 3 de noviembre 2023 | Versión final: 29 de diciembre de 2023 | Publicado: 31 de julio de 2024

### Cómo citar este artículo:

Buccioni Vadulli, R. y Vergara Vera, P. (2023). Control de calidad por medias móviles ponderadas exponencialmente para variables cualitativas. Trilogía (Santiago), 39(50), 42-63. Santiago de Chile: Ediciones UTEM.



\* Departamento de Estadística y Econometría UTEM.

Correo electrónico: r.buccioni@utem.cl.

\*\* Departamento de Estadística y Econometría UTEM.

Correo electrónico: pvergara@utem.cl.

## RESUMEN

En este trabajo se efectúa un desarrollo teórico para realizar control de calidad para variables cualitativas mediante Medias Móviles Ponderadas Exponencialmente (Mempe). El control de calidad para este tipo de variables ha sido ampliamente desarrollado utilizando la metodología clásica de Shewhart. La propuesta considera la definición de estadísticos para realizar este tipo de control, mediante simulación tipo Monte Carlo se obtienen longitudes de ráfaga media, LRM, y los parámetros para su aplicación. Se realiza una comparación del comportamiento que presenta la metodología tradicional con la metodología propuesta, lo que permite deducir que esta propuesta es más eficiente.

El método Mempe permite controlar variables cualitativas, con la ventaja de que al realizar el control en un proceso productivo, si este se sale fuera de control, este método entrega una alerta temprana, avisando que la variable en estudio se ha salido de control.

**Palabras clave:** control de calidad, medias móviles ponderadas exponencialmente, control de variables cualitativas

## ABSTRACT

In this work, a theoretical development is carried out to carry out Quality Control for qualitative variables using Exponentially Weighted Moving Averages, MEMPE. Quality control for this type of variables has been widely developed using the classic Shewhart methodology. The proposal considers the definition of statistics to carry out this type of control, through Monte Carlo simulation, average burst lengths, LRM, and the parameters for their application are obtained. A comparison is made of the behavior presented by the traditional methodology with the proposed methodology, which allows us to deduce that this proposal is more efficient.

The MEMPE method allows controlling qualitative variables, with the advantage that when controlling a production process, if it goes out of control, this method provides an early warning that the variable under study has gone out of control.

**Key words:** Quality control, exponentially weighted moving averages, control of qualitative variables

## INTRODUCCIÓN

Los gráficos de control se requieren en la industria para obtener productos de mejor calidad, debido a que permiten detectar oportunamente en qué condición se encuentra un proceso productivo en un instante específico.

Los clásicos gráficos de control de Shewhart han sido muy utilizados en la industria, aunque se ha demostrado que este método no puede detectar pequeños cambios en un proceso. El método de Shewhart fue mejorado utilizando límites probabilísticos para controlar en forma simultánea la tendencia central y la variabilidad de un proceso, definiendo límites probabilísticos, con la condición de que los datos del proceso deben tener distribución normal (Pepió y Polo, 1998). Los métodos de control de promedio móvil Mempe y el de Sumas acumuladas, CUSUM, permiten detectar tendencias y pequeños cambios que se puedan producir en procesos productivos. El método Mempe es libre de distribución, lo que representa ventajas importantes para su aplicación (Vergara, 1992). El método del promedio móvil exponencial (EWMA) para el control de calidad interno es un tipo de regla de control bien conocido en la industria: Linnett (2011) evaluó la potencia del EWMA para determinar el potencial de este método aplicado en control de calidad en química clínica. Linnett usó simulaciones, la potencia del EWMA la comparó explícitamente con el de los métodos comúnmente utilizados en química clínica. Los niveles de error tipo I se estandarizaron a valores comunes para lograr comparaciones imparciales. Para errores pequeños a moderadamente grandes (errores sistemáticos de hasta 2 o 3 desviaciones estándar), el método EWMA supera las reglas de métodos simples y múltiples. Indica que para un error sistemático de 2s, el método EWMA equivalente a la regla de los  $1_{3s}$  tiene una potencia de 0,30, mientras que la regla de los  $1_{3s}$  sólo muestra una

potencia de aproximadamente 0,15. Para  $N=4$ , la comparación se realizó con la regla  $1_{3s}/2_{2s}/R_{4s}/4_{1s}$ . Aquí el nivel de error tipo I común es 0,017. En todos los niveles de error, el método EWMA es superior a la regla múltiple. Por ejemplo, dado un error sistemático de 1s, la regla EWMA tiene una potencia (0,4) del doble del valor de la regla múltiple (0,2). Linnett concluye que EWMA es una regla de control eficiente respecto de los errores sistemáticos, que debe ser considerada para su aplicación general en el campo de la química clínica (Linnett, 2011).

Un gráfico de control es una herramienta cada vez más popular para monitorear el proceso de producción. La detección temprana de un cambio en el proceso, si lo hay, es el deseo del personal de control de calidad. En este artículo se ha desarrollado un procedimiento de gráficos de control alternativo eficaz para el seguimiento de características de calidad distribuidas exponencialmente, utilizando la media móvil doble combinada con la estadística EWMA. El rendimiento del gráfico de control propuesto se examina para diferentes combinaciones de la constante de cambio, el parámetro de suavizado EWMA, el intervalo de promedio móvil y las longitudes de ejecución promedio en control objetivo. Se ha observado que el gráfico de control propuesto es más eficiente en la detección de cambios en el proceso, en comparación con el gráfico de control sugerido por Khoo y Wang para el mismo propósito. El gráfico de control propuesto se ilustra para uso práctico con la ayuda de un conjunto de datos sintético y real (Aslam et al., 2017).

Se ha demostrado que los gráficos de control de promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA) con intervalos de muestreo variables (VSI) son sustancialmente más rápidos que los gráficos de control EWMA de intervalos de muestreo fijos (FSI) en la detección de cambios en la media del proceso. La suposición habitual para diseñar un gráfico de control es

que los datos o las mediciones se distribuyen normalmente. Sin embargo, esta suposición puede no ser cierta para algunos procesos. Se han evaluado las prestaciones de los gráficos de control EWMA y  $X$ -EWMA combinados con VSI en condiciones de no normalidad. Se muestra que agregar la función VSI a los gráficos de control de EWMA da como resultado disminuciones muy sustanciales en el tiempo esperado para detectar cambios en la media del proceso, tanto en condiciones normales como no normales. Sin embargo, en el caso del gráfico combinado  $X$ -EWMA, su tasa de falsas alarmas y su capacidad de detección se ven afectadas si los datos del proceso no se distribuyen normalmente (Yu-Chang Lin et al., 2011).

En la literatura actual no hay publicaciones respecto de aplicar el método EWMA a variables cualitativas, por ello, en este trabajo se hará un desarrollo teórico para su utilización.

### Material Y Métodos

El esquema de control de calidad basado en la Media Móvil Ponderada Exponencialmente (Mempe) lo introdujo Roberts (1959) para detectar cambios en la tendencia central de un proceso, fue revisado por Crowder (1989) y Lucas y Saccucci (1990) en cuanto a sus propiedades y utilización como procedimiento de control. En cambio Box y Jenkins (1970) y Hunter (1986) lo aplicaron como un método de previsión de la evolución del proceso. Vergara (1992) para realizar control conjunto de la media y de la varianza de procesos productivos.

La eficiencia de este método Mempe se evalúa mediante el número de muestras requeridas para superar los límites de control, conocido como Longitud de Ráfaga (LR). La distribución de LR y sus parámetros miden la potencia del método Mempe, y se utiliza en la práctica para seleccionar el procedimiento apropiado a las

condiciones específicas del proceso que se desea someter a control. Engeneral, la distribución de la LR y sus parámetros no pueden determinarse analíticamente, por ello, se obtienen numéricamente, y la determinación del Mempe se realiza sobre la base de la media de la LR, que recibe el nombre de Longitud de Ráfaga Media (LRM), y representa el número de muestras que se examinará en promedio para obtener una señal que el proceso está fuera de control.

## CONTROL DE CALIDAD CLÁSICO: VARIABLES CUALITATIVAS

### Diagramas de control de Shewhart

Muchas características de calidad no se pueden representar cuantitativamente, puesto que se está midiendo la existencia de un atributo en la unidad de observación. En tal situación el producto que se inspecciona se clasifica como Defectuoso o No Defectuoso, según las especificaciones deseadas por el productor. Si bien la información más completa puede obtenerse con mediciones realizadas sobre el producto terminado, la premura del tiempo y la simple observación ocular permiten abaratar los costos y así poder determinar si el producto Sirve o No Sirve. Actualmente es frecuente encontrar la terminología de Conformidad y Disconformidad para identificar estas dos situaciones descritas.

El control de calidad realizado para este tipo de variables se conoce con los nombres de Diagramas p o Diagramas c. Estos gráficos de control fueron propuestos originalmente por W. Shewhart en 1920; estos grafican la proporción de defectuosos o el número de defectuosos encontrados en una línea de producción.

Los límites de control para un diagrama de la proporción de defectuosos están fundamentados en la teoría de muestreo para proporciones

y en la aproximación normal de la distribución binomial.

**Diagramas de control basados en proporciones ponderadas uniformemente**

El diagrama de control para la proporción de defectos de Shewhart es relativamente insensible a pequeños cambios en el valor nominal del proceso. Se han sugerido diversas modificaciones y criterios suplementarios con el fin de mejorar su capacidad para detectar pequeños cambios. También se ha demostrado que el diagrama de control de sumas acumuladas (Goel y Wu, 1971) es más eficaz que el diagrama para la proporción en la detección de cambios pequeños en el proceso. Como es el caso del diagrama de sumas acumuladas, las gráficas de control de procesos basadas en medias ponderadas (ponderaciones que suelen ser uniformes o geométricas) tienen una alta potencialidad para detectar automáticamente cualquier señal de un manifiesto deterioro de la calidad del proceso.

Estos gráficos de control de medias ponderadas tratan de cubrir las deficiencias del diagrama de control de Shewhart relativas a su inestabilidad, a pequeños cambios en el valor nominal del proceso, y forman parte de las diversas modificaciones y criterios suplementarios sugeridos con el fin de mejorar la capacidad para detectar los citados cambios pequeños.

**Diagrama para la media móvil de la proporción con valor p conocido**

Si se supone que se conoce la verdadera proporción de defectuosos de un proceso de elaboración, o que la administración le asigna un valor estándar, para construir el diagrama de control para la proporción móvil se toman muestras consecutivas  $n_i$  de unidades (subgrupos), se calcula para cada muestra a partir de la número  $w$  ( $t \geq w$ ) la proporción muestral móvil  $p_t$  para luego ser ubicada en gráfico ubicando el

valor,  $p_t$  en el diagrama. Esto se realiza para cada muestra  $y$ , en el caso que  $t < w$ , se grafican los puntos  $p_t$  obtenidos considerando el promedio aritmético ordinario. Se considera inicialmente que  $n_i = n$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , siendo  $k$  el número de subgrupos.

El diagrama de control de la media móvil geométrica para proporciones, también conocido como diagrama de media móvil ponderada exponencialmente (Mempe), puede considerarse un procedimiento de control, considerando una variable cualitativa, lo que se traducirá en la construcción de la proporción en que cada valor  $p$  de la muestra  $p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-w+1}$  es ponderada por  $1/w$  en el instante  $t$ , y las proporciones obtenidas en los períodos anteriores a  $t-w$  son ponderadas por cero.

Si los diagramas de control de la media móvil para la proporción son más eficaces que los diagramas de medias para detectar pequeños cambios en el proceso, entonces parece razonable que se podrán utilizar otros tipos de medias ponderadas para construir un diagrama de control, de donde se deduce la razón de ser de una gráfica de control basada en la media móvil ponderada exponencialmente definida por:

$$Z_t = \lambda \hat{p}_t + (1 - \lambda) Z_{t-1} \quad t > 0$$

donde  $\lambda$  es una constante real con valores entre 0 y 1.

El valor inicial (necesario para la primera muestra en  $t=1$ ) es  $Z_0 = M(p)$ , esto es, la media aritmética de las proporciones obtenidas en cada una de las muestras o en su defecto  $Z_0 = p$  en el caso que  $p$  sea conocido o bien sea establecido inicialmente.

La estadística  $Z_t$  corresponde a una media ponderada de todas las proporciones muestrales anteriores, ya que si sustituimos  $Z_{t-1}$  en la parte derecha de  $Z_t$  por su valor iterativo, tendremos:

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda \cdot \hat{p}_t + (1-\lambda) \cdot Z_{t-1} \\ &= \lambda \cdot \hat{p}_t + (1-\lambda) \cdot [\lambda \cdot \hat{p}_{t-1} + (1-\lambda) \cdot Z_{t-2}] \\ &= \lambda \cdot \hat{p}_t + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot \hat{p}_{t-1} + (1-\lambda)^2 \cdot Z_{t-2} \end{aligned}$$

continuando con la sustitución recursiva de  $Z_{t-j}$  donde  $j=2,3,\dots,t$ , se obtiene la estadística:

$$Z_t = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \cdot \hat{p}_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot Z_0$$

Los pesos  $\lambda \cdot (1-\lambda)^j$  decrecen geométricamente, generando una secuencia de valores que están en progresión de tipo geométrica de razón  $(1-\lambda)$ .

Además, la suma de los pesos será igual a uno, ya que:

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j &= \lambda \cdot \left[ \frac{(1-\lambda)^{t-1} \cdot (1-\lambda) - 1}{(1-\lambda) - 1} \right] \\ &= \lambda \left[ \frac{1 - (1-\lambda)^t}{1 - (1-\lambda)} \right] \\ &= 1 - (1-\lambda)^t \end{aligned}$$

Si las  $\hat{p}_i$  son variables aleatorias independientes con varianza  $\frac{p \cdot (1-p)}{n}$ , entonces la varianza de  $Z_t$  es:

$$\begin{aligned} V(Z_t) &= V \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \cdot \hat{p}_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot Z_0 \right] = \\ V(Z_t) &= \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^{2j} \cdot V(\hat{p}_{t-j}) + (1-\lambda)^{2t} \cdot V(Z_0) \\ V(Z_t) &= \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^{2j} \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Z_t) &= \frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \lambda^2 \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^{2j} \\ V(Z_t) &= \frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \lambda^2 \left[ \frac{(1-\lambda)^{2(t-1)} \cdot (1-\lambda)^2 - 1}{(1-\lambda)^2 - 1} \right] \\ V(Z_t) &= \frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \lambda^2 \left[ \frac{(1-\lambda)^{2t} - 1}{\lambda^2 - 2\lambda} \right] \\ V(Z_t) &= \frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \left[ \frac{\lambda}{2-\lambda} \right] \cdot [1 - (1-\lambda)^{2t}] \end{aligned}$$

En esta última igualdad se puede observar que cuando  $t$  aumenta,  $V(Z_t)$  aumenta hasta alcanzar un valor límite, que suele denominarse valor asintótico y que vale:

$$V(Z_t) = \frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \left[ \frac{\lambda}{2-\lambda} \right]$$

Analizando el valor esperado de  $Z_t$  se tiene que:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \cdot \hat{p}_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot Z_0 \right] \\ &= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \cdot E(\hat{p}_{t-j}) + (1-\lambda)^t \cdot E(Z_0) \\ &= \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j p \right] + (1-\lambda)^t \cdot p \\ &= p \cdot [1 - (1-\lambda)^t] + p \cdot (1-\lambda)^t \\ &= p \cdot [1 - (1-\lambda)^t + (1-\lambda)^t] \\ E(Z_t) &= p \end{aligned}$$

Esto significa que la estadística  $Z_t$  así definida, tiene una media y varianza conocida lo que permite construir los límites de control cuando se ha establecido una variable cualitativa en el proceso de control de calidad.

**Diagrama de Media Móvil Ponderada Exponencialmente con parámetros conocidos**

Suponiendo que se obtienen sucesivas muestras de una población todas de igual tamaño  $n$ , y sean  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_r, \dots$  las proporciones muestrales correspondientes, siendo  $Z_t$  las medias móviles geométricas de orden  $r$  obtenidas a partir de la respectiva proporción muestral. Suponiendo además que se establece el valor del parámetro  $p$  del proceso de fabricación, con el propósito de construir el diagrama de control de media móvil geométrica. Para ello, se toman muestras sucesivas de tamaños  $n_t$  unidades, todas de igual tamaño, calculándose para cada una de ellas la proporción y a partir de tal valor se evalúa la media móvil ponderada exponencialmente o media móvil geométrica  $Z_p$ , graficándose cada punto en el diagrama.

Para calcular los límites de control de Shewhart se sabe que si  $T$  es un estadístico muestral que mide la característica de calidad de interés donde la media de  $T$  es  $\mu_T$  con desviación estándar  $\sigma_T$ , en este trabajo se propone la línea central y los límites reales superior e inferior del gráfico de control  $k$ -sigmas de Shewhart por:

$$LSC = p_t + k \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[ 1 - (1-\lambda)^{2t} \right]}$$

$$\text{Línea Central} = p_t$$

$$LIC = p_t - k \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[ 1 - (1-\lambda)^{2t} \right]}$$

Donde  $k$  es la distancia entre los límites de control y la línea central, expresada en desviaciones estándar.

Considerando el estadístico  $T$  como  $Z_t$ , ya que se sabe que tiene una media  $p$  y una varianza asintótica  $\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right)$

Se puede entonces definir los límites de control asintóticos 3 sigmas de Shewhart como:

$$LSC = p + 3 \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}$$

$$\text{Línea Central} = p$$

$$LIC = p - 3 \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}$$

Estos límites de control expresados en términos de los valores no asintóticos o reales son:

$$LSC = p + 3 \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[ 1 - (1-\lambda)^{2t} \right]}$$

$$\text{Línea Central} = p$$

$$LIC = p - 3 \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[ 1 - (1-\lambda)^{2t} \right]}$$

El procedimiento de control consiste en calcular el valor  $Z_p$ , graficarlo en un diagrama de control con el límite superior ya especificado y concluir que el proceso está fuera de control cuando  $Z_t$  cae fuera de los límites de control o si se observa un patrón no aleatorio entre los puntos.

**Gráficos de los límites de control para la Varianza Asintótica y Real**

En la Figura 1 se muestran algunos gráficos donde se comparan los límites de control para varianza asintótica respecto de la varianza real.

**Figura 1. Valor real (negro) y asintótico (lila) para diferentes valores de  $\lambda$**

Se observa claramente en los que cuando el valor del ponderador  $\lambda$  es pequeño, la varianza real tiende al valor de la varianza asintótica más tardíamente.

**Límites probabilísticos**

Para calcular los límites probabilísticos de control para  $1-\alpha$  se hace uso de la media y varianza conocida de la estadística, estableciendo que:

$$W = \frac{Z_t - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}}$$

Esta expresión converge asintóticamente a una distribución  $N(0,1)$ , a partir de la convergencia se tiene:

$$P \left[ p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \leq Z_t \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \right] = 1 - \alpha$$

**Diagrama de Control cuando no se especifica el valor p**

En ocasiones suele suceder que la proporción de defectuosos en un proceso de control de calidad no se conoce. Para ello, la construcción de los límites de control pasa por el proceso de estimación del parámetro p.

Se consideran k muestras de igual tamaño calculando la respectiva proporción, generando el conjunto  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_k$ , y se obtiene  $\hat{p}$  como el promedio aritmético de estas proporciones.

Repitiendo el procedimiento, los límites asintóticos de control se construyen sustituyendo los parámetros por el estimador correspondiente  $\hat{p}$ , quedando de la siguiente forma:

$$LSC = \hat{p} + 3\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n} \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)}$$

$$\text{Línea Central} = P$$

$$LIC = \hat{p} - 3\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n} \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)}$$

Mientras la media móvil ponderada exponencialmente se mantenga bajo el límite superior de control (LSC) y la sucesión de puntos definida por los valores  $Z_i$  no muestren un patrón sistemático de comportamiento, se concluye que el proceso está bajo control. Si quedan puntos fuera de los límites de control o se observan un comportamiento no aleatorio entre los puntos  $Z_i$ , habrá que concluir que la proporción de defectuosos cambió hacia un nuevo valor y que, por lo tanto, el proceso se encuentra fuera de control.

En caso que los tamaños de las muestras sean diferentes, existe la alternativa de obtener los límites de control para cada valor de la proporción. Esto significa que los límites de control que se generan no serán líneas rectas. Una opción útil, cuando los tamaños de muestra no son iguales, presentado pequeñas diferencias, es tomar como valor común al promedio aritmético de los  $n_i$ . También se puede optar por considerar a  $n$  como el máximo de los  $n_i$ , con ello se logra límites de control sensibles, puesto que la amplitud de la franja que indica al proceso en estado de control es inversamente proporcional al tamaño de la muestra. Pero es preferible trabajar con tamaños de muestra de igual magnitud.

En caso que las muestras presenten tamaños muy diferentes, se toman los siguientes límites de control asintóticos 3 sigmas de Shewhart:

$$LSC = \hat{p} + 3\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n} \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)}$$

$$\text{Línea Central} = \hat{p}$$

$$LIC = \hat{p} - 3\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n} \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)}$$

donde

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

Para realizar el gráfico de control, en el eje de las abscisas se colocan los números de muestras y en el eje de las ordenadas se colocan las medias móviles ponderadas exponencialmente  $Z_i$ . Si se considera como factor de ponderación a  $\lambda$  como:  $\lambda = \frac{2}{w - 1}$ , los límites de control

para de la media móvil concuerdan con el límite de control de la media móvil ponderada exponencialmente.

El diagrama de control de la media móvil ponderada exponencialmente es más eficaz para detectar cambios pequeños en el proceso respecto del diagrama de la media móvil. Además, habrá que utilizar pequeños valores de  $\lambda$  si se desean detectar lo antes posible cambios pequeños.

Es también importante señalar que al considerar  $\lambda=1$  en el esquema Mempe, se obtiene el diagrama de control de Shewhart. También es importante hacer notar que el esquema Mempe es un procedimiento óptimo para un proceso en la cual la proporción de defectuosos en un período  $t$  se relaciona con la proporción

de defectuosos en el período  $t-1$ , mediante la ecuación:

$$\hat{p}_t = \hat{p}_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde las  $\varepsilon_t$  son variable normales idénticamente distribuidas con media 0 y varianza  $\sigma_w^2$ .

### Algoritmo de Simulación

Se fijó un valor para la proporción de defectuosos  $p$  y un tamaño de muestra  $n$ . Simulando un valor aleatorio de una distribución Bernoulli, este se transforma en la proporción muestral  $\hat{p}_t$ .

A continuación se calcula el valor  $Z_t = \lambda \hat{p}_t + (1-\lambda) Z_{t-1}$ , asignando a  $Z_0 = p^*$  donde  $p^*$  es la proporción de unidades defectuosas admisibles para el proceso.

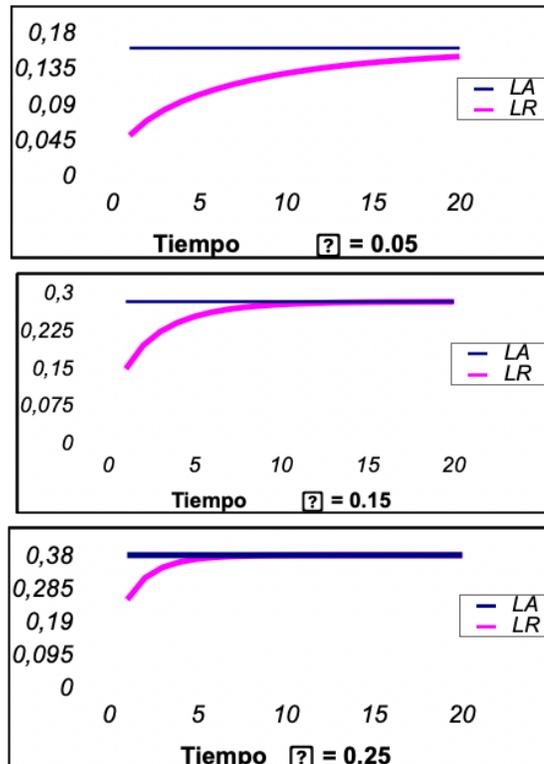
Se construye LSC bajo el valor  $p^*$ , a diferentes distancias de él tanto para el gráfico de control de Shewhart y Mempe.

Si  $Z_t$  excede a LSC, el proceso se encuentra fuera de control. Contabilizamos el número de repeticiones realizadas hasta obtener un resultado más allá de LSC. En este instante se acumula una ráfaga. El contador retorna a cero, replicando la simulación. Para obtener la Longitud de Ráfaga Media se repitió este procedimiento 1000 veces para diferentes valores de  $n$ ,  $p$  y  $z$ .

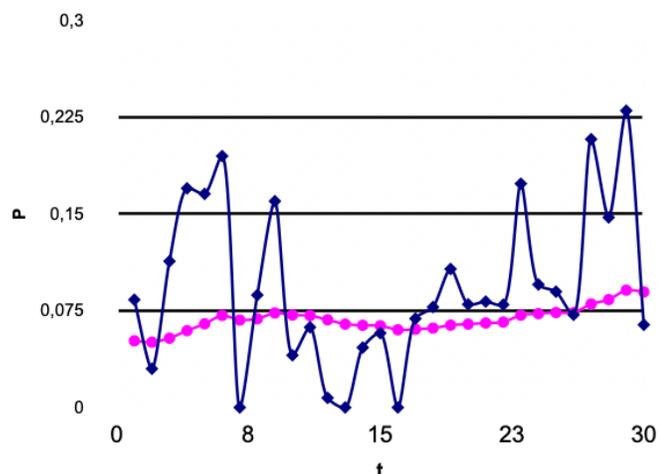
## RESULTADOS

Como una primera muestra de los resultados obtenidos, se despliega un conjunto de gráficos que permite visualizar el cambio que experimentan los valores  $Z$  al ser comparados con los valores iniciales de un proceso simulado con  $p=0.10$  y considerando como  $p^*=0.05$ ; es decir, el proceso está fuera de control, entregando un 10% de defectuosos cuando en realidad se encuentra programado para un 5%. Cada uno de estos gráficos se construyó considerando en cada período  $t$  muestras de tamaño 30.

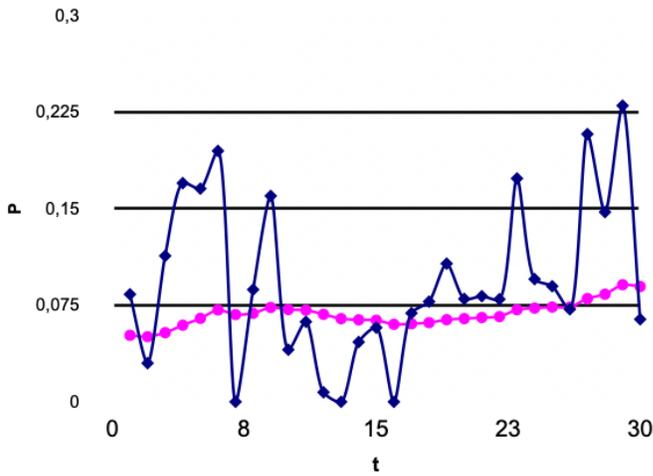
**Fig 1. Valor real (♦) y asíntótico (●) para diferentes valores de  $\lambda$**



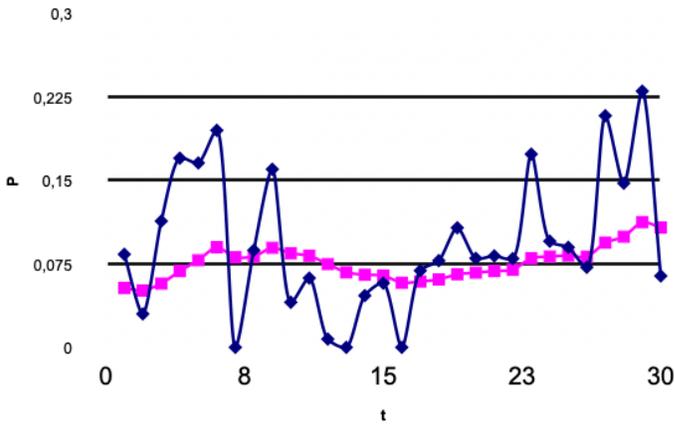
**Figura 2. Comparación entre valores  $p$  (♦) y  $Z$  (●) para  $\lambda = 0.05$**



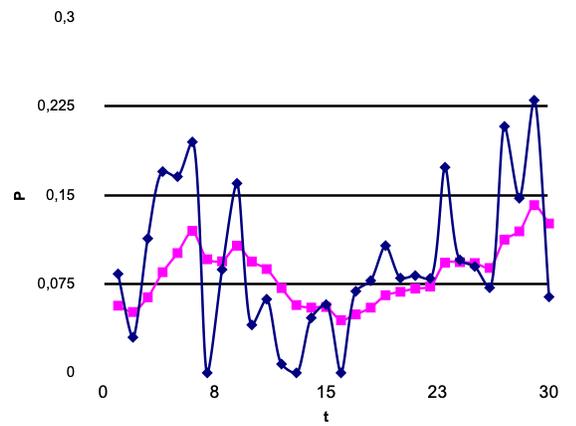
**Figura 3. Comparación entre valores  $p(\blacklozenge)$  y  $Z(\bullet)$  para  $\lambda = 0.10$**



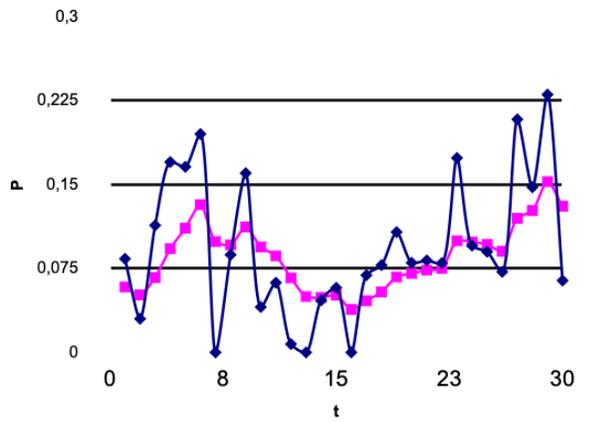
**Figura 4. Comparación entre  $p(\blacklozenge)$  y  $Z(\bullet)$  para  $\lambda = 0.15$**



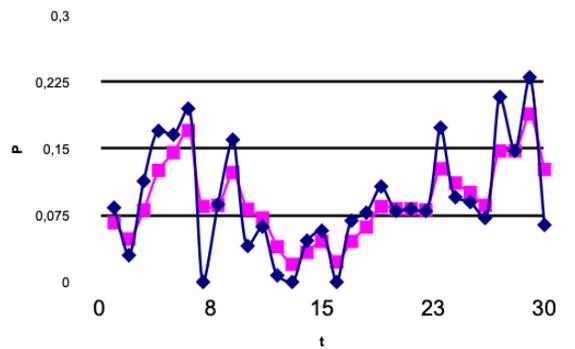
**Figura 5. Comparación entre valores  $p(\blacklozenge)$  y  $Z(\blacklozenge)$  para  $\lambda = 0.20$**



**Figura 6. Comparación entre valores  $p(\blacklozenge)$  y  $Z(\blacklozenge)$  para  $\lambda = 0.25$**



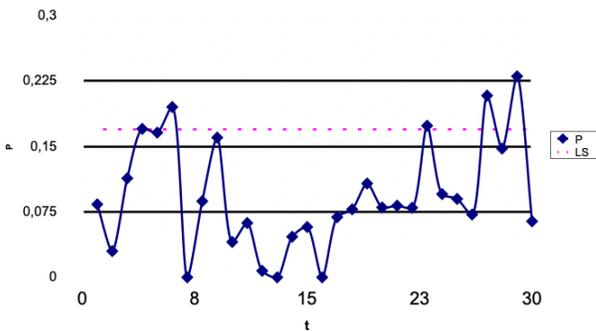
**Figura 7. Comparación entre valores  $p(\blacklozenge)$  y  $Z(\blacklozenge)$  para  $\lambda = 0.50$**



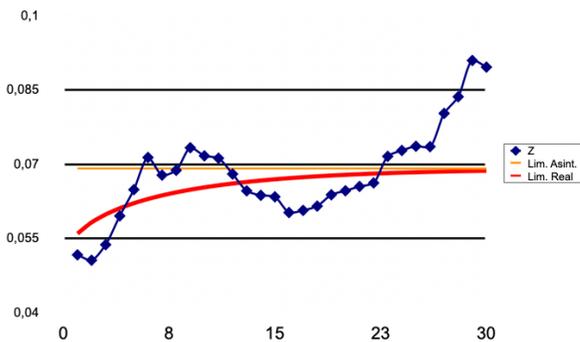
Se puede observar desde la Figura 2 hasta la Figura 7 que los valores  $Z$  presentan un comportamiento más alisado (Figura 2) para valores pequeños de  $\lambda$ , mientras que para mayores valores de  $r$  se observa una convergencia entre los valores de  $p$  y  $Z$ , Fig 7.

A continuación se muestran los gráficos de control Shewhart y Mempe ambos alejados a 3-sigmas del valor nominal, que en este ejemplo alcanza a  $p^*=0.05$

**Figura 8. Gráfico de control de Shewart 3-sigma**



**Figura 9. Gráfico de control Mempe con límites asintóticos y reales para  $\lambda=0.05$**



En las figuras 8 y 9 se aprecia, para un proceso fuera de control con valor nominal  $p^*=0.05$  y valor real de trabajo  $p=0.10$ , que en ambos casos la primera observación en quedar fuera corresponde a la número cuatro, lo que significa una LR = 4; sin embargo siguiendo la secuencia general se tiene que el esquema Mempe: con-

tiene mayor cantidad de puntos fuera de los límites de control tanto real como asintótico. Cuadro resumen de las Longitudes de Ráfaga Media

1.- Proceso bajo control:

**Tabla 1. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 30$ ;  $p^* = p = 0.10$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 30$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = p = 0.10$	4315	2650	1800	1505	1401	1350

**Tabla 2. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 100$ ;  $p^* = p = 0.10$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 100$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = p = 0.10$	500	332	710	620	440	484

Se observa que, bajo control, una falsa alarma se presenta tardíamente; es decir, que mayoritariamente bajo cualquiera de los procedimientos por utilizar es difícil detener el proceso anticipadamente de manera equivocada.

2.- Proceso fuera de control:

**Tabla 3. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 30$ ;  $p^* = 0.05$  y  $p = 0.10$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 30$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.05$	5,2	6,4	8,1	16,3	21,7	24,4

**Tabla 4. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 100$ ;  $p^* = 0.05$  y  $p = 0.10$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 100$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.05$	2,5	3,8	5,7	8,5	12,4	15,6

**Tabla 5. LRM para  $z = 2$ ,  $n = 30$ ;  $p^* = 0.05$  y  $p = 0.10$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 30$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.05$	2,7	3,4	4,5	7,5	10,2	15,3

**Tabla 6. LRM para  $z = 2$ ,  $n = 100$ ;  $p^* = 0.05$  y  $p = 0.10$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 100$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.05$	1,8	2,5	4,8	6,6	7,5	11,2

**Tabla 7. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 30$ ;  $p^* = 0.10$  y  $p = 0.15$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 30$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.10$	4,7	5,4	6,5	9,5	19,2	25,2

**Tabla 8. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 100$ ;  $p^* = 0.10$  y  $p = 0.15$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 100$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.10$	3,8	2,5	4,8	6,6	7,5	11,2

**Tabla 9. LRM para  $z = 2$ ,  $n = 30$ ;  $p^* = 0.10$  y  $p = 0.15$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 30$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.10$	3,1	4,4	5,1	6,3	12,5	18,5

**Tabla 10. LRM para  $z = 2$ ,  $n = 100$ ;  $p^* = 0.10$  y  $p = 0.15$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 100$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.10$	2,8	2,7	5,4	7,1	7,8	12,2

**Tabla 11. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 30$ ;  $p^* = 0.05$  y  $p = 0.15$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 30$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.05$	1,7	2,4	3,5	4,7	5,4	7,5

**Tabla 12. LRM para  $z = 3$ ,  $n = 100$ ;  $p^* = 0.05$  y  $p = 0.15$  y diferentes valores  $\lambda$**

$n = 100$	$\lambda=0.10$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.50$	$\lambda=0.75$	$\lambda=0.90$	LRM(Shewhart)
$p^* = 0.05$	1,2	2,5	3,8	5,6	6,2	7,2

Desde la Tabla 3 a la Tabla 12 se observa que, mientras mayor sea la distancia entre el valor nominal del proceso y el valor real, es más temprana la señal de estar fuera de rango y por lo tanto se hace necesario la intervención.

### CONCLUSIONES

En procesos de control en condiciones de normalidad, esto es no degradado, el esquema Mempe entrega falsas alarmas en una cantidad promedio menor respecto del esquema tradicional de Shewhart.

En procesos que se encuentra fuera de control entregó las LRM son menores para todos los valores de  $\lambda$  utilizados que la LRM calculada

utilizando el estadístico de Shewhart. Lo que representa una ventaja de este método propuesto.

Mientras la diferencia entre el valor nominal del proceso  $p^*$  y el valor real  $p$  se incrementa, la LRM disminuye ostensiblemente.

Para aplicar el esquema Mempe planteado en este trabajo, se deben considerar muestras de al menos 30 unidades, de tal manera de garantizar la eficiencia de este esquema respecto del método tradicional.

Vergara P. (1992). *Nuevas Técnicas Acumulativas de Control de Calidad. Control Conjunto por Medias Móviles Ponderadas Exponencialmente para la tendencia central y la variabilidad*. Barcelona, España: Universidad Politécnica de Cataluña. ISBN : 84-7653-206-7, Depósito Legal: B.2.201-92.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aslam, M.; Gui, W., Khan, N. y Jun, Ch-H. (2016). Double moving average–EWMA control chart for exponentially distributed quality. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. <https://doi.org/10.1080/03610918.2016.1236955>.

Khan, N.; Aslam, M. U Jun, Ch-H. (2015). A EWMA Control Chart for Exponential Distributed Quality Based on Moving Average Statistics. *Journal Quality and Reliability Engineering International*. <https://doi.org/10.1002/qre.1825>.

Linnet, K. (2011). The exponentially weighted moving average (EWMA) rule compared with traditionally used quality control rules. *Journal Clinical Chemistry and Laboratory Medicine (CCLM)*. <https://doi.org/10.1515/CCLM.2006.077>.

Lin, Y-Ch. yChou, Ch-Y. (2011). Robustness of the EWMA and the combined X–EWMA control charts with variable sampling intervals to non-normality. *Journal of Applied Statistics*, 553-570. <https://doi.org/10.1080/02664760903521443>.



Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución-Compartir Igual 4.0 Internacional. Atribución: debe otorgar el crédito apropiado a la Universidad Tecnológica Metropolitana como editora y citar al autor original. Compartir igual: si reorganiza, transforma o desarrolla el material, debe distribuir bajo la misma licencia que el original.



UNIVERSIDAD  
TECNOLÓGICA  
METROPOLITANA  
*del Estado de Chile*

# TRILOGÍA

CIENCIA · TECNOLOGÍA · SOCIEDAD



EDICIONES UNIVERSIDAD  
TECNOLÓGICA METROPOLITANA