

Actividades antropogénicas moderadas propician un ecosistema marino sostenible

Moderate anthropogenic activities propitiate a sustainable marine ecosystem

 Luis Horacio Rios-Carrillo¹,  Gonzalo Jaziel García-Cruz²,
 José Geiser Villavicencio-Pulido²

✉ 2173036874@correo.ler.uam.mx

¹ Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.

² Departamento de Ciencias Ambientales, División de Ciencias Biológicas y de la Salud,
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Lerma, Estado de México, México.

Recepción: 2024-06-01 | Aceptación: 2024-12-10 | Publicación: 2024-12-20

Citación recomendada: Rios-Carrillo, L.H. *et al.* (2024). 'Actividades antropogénicas moderadas propician un ecosistema marino sostenible'. Rev. model. mat. sist. biol. Vol., e24R02, doi:10.58560/rmmsb.v04.e.024.02



This open access article is licensed under a Creative
Commons Attribution International (CC BY 4.0) <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.
Support: NA

RESUMEN

Con el gran crecimiento que han tenido las actividades humanas cerca de zonas costeras en los últimos años, resulta inevitable comprender las consecuencias que estas tienen sobre los ecosistemas marinos. La dinámica entre peces herbívoros y macroalgas son una de las relaciones que han sido afectadas debido a actividades antropogénicas como la pesca y el turismo. En este trabajo se propone un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales que analiza la dinámica existente entre peces herbívoros, algas y actividades humanas. Del análisis del modelo se concluye que escenarios de exclusión de las algas son posibles cuando se aplican estrategias estrictas sobre las actividades humanas. En contraste, escenarios de coexistencia de algas, peces herbívoros y actividades antropogénicas ocurren si estas últimas ocurren de manera moderada. Simulaciones numéricas muestran los resultados obtenidos. Finalmente, discutimos a detalle las implicaciones biológicas y sociales de aplicar estrategias de control a las actividades antropogénicas, lo cual puede ser de utilidad para los tomadores de decisiones en cuestiones de sostenibilidad.

Palabras Claves:

Actividades antropogénicas, estrategias de control, escenarios sostenibles, ecosistemas marinos.

ABSTRACT

With the rapid growth of human activities near coastal zones in recent years, it results inevitable to try to understand the consequences that they have on marine ecosystems. The dynamic between herbivorous fish and macroalgae are an example of relationships that had been affected due to anthropogenic activities like fishing and tourism. In this work, we propose a mathematical model based on differential equations that analyzes the existent dynamic among herbivorous fish, macroalgae and human activities. From the analysis of the model, we conclude that exclusion scenarios for the algae population are possible when strict strategies are applied on the human activities. In contrast, coexistence scenarios of herbivorous fish, macroalgae and anthropogenic activities may occur if the latter occur in a moderate way. Also, numerical simulations of the results are shown. Finally, we discuss in detail biological and social implications of applying control strategies to anthropogenic activities, which can be helpful for decision-makers on sustainability issues.

Keywords:

Anthropogenic activities, control strategies, sustainable scenarios, marine ecosystems.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: Primary: 92B05; Secondary:

INTRODUCCIÓN

Los efectos antropogénicos sobre la naturaleza han cambiado la biodiversidad de algunos sitios. En particular, actividades humanas cerca de zonas costeras están dañando la biodiversidad de los ecosistemas marinos (Vikas and Dwarakis, 2015; Chatterjee, 2017). Por ejemplo, la estructura y función de arrecifes de coral son afectados por estresores antropogénicos tales como la pesca y el turismo (Leitão *et al.*, 2023). Además, efectos derivados de ambas actividades antropogénicas tienen una relación directa con la degradación de los arrecifes coralinos (Lachs and Oñate-Casado, 2020).

Gil *et al.* (2015) muestran que el turismo basado en snorkel o buceo son factores que impulsan la degradación ecológica de arrecifes coralinos. En su investigación en la Bahía de Akumal, México, los autores reportan que los arrecifes de coral son degradados debido a esos servicios turísticos. En particular, la disminución de la abundancia de peces herbívoros puede ser atribuido a que los peces de arrecife pierden parte de su hábitat debido al contacto físico directo, el cual está asociado a tocar, pisotear y fondear botes. Eastwood *et al.* (2017) reportan que en Miche, República Dominicana, los arrecifes están amenazados por actividades turísticas, la sobrepesca, daños estructurales provocados por los humanos y el blanqueamiento de corales. En Miche, los pescadores usan redes de enmalle, con las cuales capturan peces de todos los tamaños y en diferentes estadios de su ciclo de vida. En particular, ellos capturan peces herbívoros, lo cual contribuye a la degradación de los arrecifes en Miche. Otros factores asociados al turismo que resultan adversos para los ambientes marinos es la descarga de aguas residuales y de materia orgánica (Fabricius, 2005; Redding *et al.*, 2013).

La disminución de peces herbívoros, debido a la pérdida de su hábitat, la sobrepesca, la descarga de aguas residuales, y la descarga de materia orgánica, fomentan el desarrollo de macroalgas en un ecosistema. Esto se debe en primer lugar, a que la pesca de peces herbívoros elimina a los reguladores naturales de las algas (López-Jiménez *et al.*, 2020). En segundo lugar, un incremento de fuentes de carbono asociadas a las descargas de aguas residuales y materia orgánica fomentan el desarrollo de macroalgas en un ecosistema (Lapointe *et al.*, 2005; Davidson *et al.*, 2014). Es de enfatizar que el crecimiento desmedido de la cobertura de las algas, la cual va en aumento (Hallegraeff, 1993), parece tener una relación directa con la degradación de arrecifes coralinos. Esta disminución de los arrecifes ocurre debido a que las algas y los corales compiten por los nutrientes bentónicos (Bauman *et al.*, 2010; Brown *et al.*, 2017).

Efectos antropogénicos sobre ecosistemas han sido estudiados a través de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales. A continuación se mencionan algunos de estos modelos. Efectos de la industrialización sobre los bosques han sido estudiados en Agarwal *et al.* (2010); Dubey (1997); Dubey and Das (1999); Dubey and Hussain (2003); Dubey *et al.* (2009); Dubey (2012); Dubey *et al.* (2003); Misra and Lata (2015); Misra *et al.* (2014a,b); Shukla *et al.* (1988, 1989, 2011). Impactos de actividades mineras sobre

los recursos de un bosque y la vida silvestre ha sido estudiado por Jyotsna and Tandon (2017). Efectos de actividades turísticas sobre la calidad del ambiente han sido estudiados por diferentes autores. Por ejemplo, los efectos del turismo y la infraestructura turística sobre la calidad del ambiente han sido estudiados en Casagrandi and Rinaldi (2002); Lacitignola *et al.* (2007), los efectos del turismo de naturaleza sobre un bosque y la vida silvestre se analiza en Villavicencio-Pulido *et al.* (2023). El impacto de la pesca en arrecifes de corales han sido estudiados en Zikkah *et al.* (2020a,b); Quintero *et al.* (2016). También, los efectos de la pesca y caza de aves en una reserva ecológica ha sido estudiado en Diop and Séné (2016, 2018).

En este trabajo se propone un modelo matemático que describe la dinámica poblacional de algas y peces herbívoros cuando estresores antropogénicos afectan su dinámica. El análisis del modelo permitirá proponer condiciones sobre las actividades humanas para controlar o erradicar la población de algas. Para este propósito, en el proceso de modelación, se considera que diversas actividades humanas ejercen presión positiva sobre las algas y presión negativa para los peces herbívoros.

EL MODELO

En esta sección se construye un modelo que describe la dinámica entre algas, peces herbívoros y actividades antropogénicas, las cuales serán denotadas por A , H y P , respectivamente. En la construcción del modelo se considera que en ausencia de peces herbívoros y actividades antropogénicas, la dinámica poblacional de las algas está descrita por un crecimiento logístico. En el proceso de modelado se considera dos efectos sobre los nacimientos y las muertes de las algas. En primer lugar, la tasa de crecimiento per capita de las algas es una función decreciente de su densidad poblacional. En segundo lugar, la tasa per capita de muerte es una función creciente de la densidad poblacional. Ambos efectos están asociados a la competencia intraespecífica. Entonces

$$\begin{aligned} b_A &= b_0^A - b_1^A A, \\ d_A &= d_0^A + d_1^A A. \end{aligned} \quad (1)$$

Las expresiones b_A y d_A son las tasa de nacimientos y muertes de las algas, respectivamente. En (1), b_0^A y d_0^A son las tasas de nacimiento y muerte a densidad cero mientras que b_1^A y d_1^A modela los factores denso-dependientes que regulan a la población de algas.

Si en el proceso de modelado se considera que las actividades humanas incrementa los nacimientos y reduce las muertes de las algas, entonces la ecuación (1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} b_A &= b_0^A - \frac{b_1^A A}{h+P}, \\ d_A &= d_0^A + \frac{d_1^A A}{h+P}. \end{aligned} \quad (2)$$

En (2), $h+P$ es el factor asociado a las actividades antropogénicas que regula nacimientos y muertes de las algas. Al considerar que la muerte de algas aumenta por la presencia

de peces herbívoros, la tasa de muerte dada en (2) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} b_A &= b_0^A - \frac{b_1^A A}{h+P}, \\ d_A &= d_0^A + \frac{d_1^A A}{h+P} + nH. \end{aligned} \quad (3)$$

El parámetro n en (3) es el factor en el que se incrementa la muerte de algas debido a la presencia de peces herbívoros. La tasa per capita de cambio en la densidad poblacional de las algas, nacimientos menos muertes, está dada por

$$\frac{\dot{A}}{A} = a - \frac{bA}{h+P} - nH, \quad (4)$$

con $a = b_0^A - d_0^A$ y $b = b_1^A + d_1^A$.

En la ecuación (4), el parámetro a es la tasa de crecimiento per capita en densidad poblacional cero mientras que el parámetro b es la tasa de competencia intraespecífica.

Para construir la ecuación para los peces herbívoros se procederá de manera análoga a la construcción de la ecuación de las algas dada en (4).

Para este fin, considere que en la población de peces herbívoros, los nacimientos decrecen por competencia intraespecífica pero aumentan debido al consumo de las algas. Además, considere que en la población de herbívoros, las muertes aumentan por la competencia intraespecífica y por la captura de peces debido a la actividad pesquera. Entonces, los nacimientos y la muertes en la población de herbívoros están dados por

$$\begin{aligned} b_H &= b_0^H - b_1^H H + mA, \\ d_H &= d_0^H + d_1^H H + fP. \end{aligned} \quad (5)$$

En las expresiones dadas en (5), los parámetros m y f son los factores de regulación de nacimientos y muertes por el consumo de algas y las actividades antropogénicas, respectivamente. Por lo tanto, la tasa per capita de cambio en la densidad poblacional de los peces herbívoros está dada por

$$\frac{\dot{H}}{H} = d - cH - fP + mA. \quad (6)$$

con $d = b_0^H - d_0^H$ y $c = b_1^H + d_1^H$. En la ecuación (6), el parámetro d es la tasa de nacimientos de peces herbívoros, c es la tasa de competencia intraespecífica entre los peces herbívoros, f es la tasa de explotación de los peces herbívoros por los pescadores, y finalmente, m es la proporción de nacimientos de peces debido al consumo de algas.

Finalmente, en la construcción de la ecuación de las actividades antropogénicas se considera que la tasa de crecimiento per capita de las actividades humanas aumenta por la presencia de peces herbívoros a una tasa g . Además, se considera que las actividades humanas son controladas a una tasa j . Entonces, la dinámica de las actividades humanas esta regida por la siguiente ecuación.

$$\frac{\dot{P}}{P} = gH - jP. \quad (7)$$

En la ecuación (6), el parámetro g es la tasa de crecimiento de actividades antropogénicas debido a la presencia de peces

herbívoros mientras que el parámetro j es la tasa de control de las actividades antropogénicas debidas a medidas externas aplicadas por las agencias gubernamentales.

Usando las ecuaciones (4), (6) y(7), el modelo que describe la interacción entre algas, peces herbívoros y actividades antropogénicas está dado por

$$\begin{aligned} \dot{A} &= bA \left(\frac{a}{b} - \frac{A}{h+P} \right) - nAH, \\ \dot{H} &= cH \left(\frac{d}{c} - H \right) - fPH + mAH, \\ \dot{P} &= gPH - jP^2. \end{aligned} \quad (8)$$

El modelo (8) describe la dinámica poblacional de algas y peces herbívoros cuando factores antropogénicos incrementan la capacidad de carga de las algas debido a un incremento de materia orgánica asociada a los turistas, la cual sirve de sustrato a las algas. Además, se considera una disminución de peces que son reguladores naturales de las poblaciones de algas debido a destrucción del hábitat inducida por actividades humanas. Además, el modelo describe un decrecimiento de las poblaciones de peces herbívoros debido a que se ejecutan actividades turísticas y pesca. En el proceso de modelado se considera que las actividades antropogénicas tales como el snorkel, el buceo y la pesca aumentan como función de la densidad de los peces herbívoros y decrecen debido a la aplicación de estrategias de control.

En la siguiente sección se muestran resultados de existencia y estabilidad de puntos de equilibrio del modelo dado en (8).

EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL MODELO

En esta sección se enunciarán resultados de existencia y estabilidad de equilibrios del modelo. En primer lugar se enunciarán resultados sobre los equilibrios de frontera del modelo, los cuales describen escenarios de exclusión de al menos una especie. En segundo lugar se enunciarán resultados asociados a los equilibrios interiores del modelo, los cuales describen escenarios de coexistencia entre algas, peces herbívoros y actividades humanas.

ESCENARIOS DE EXCLUSIÓN

El modelo dado en (8) presenta los siguientes equilibrios de frontera.

Exclusión de dos poblaciones:

$$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = \left(\frac{ah}{b}, 0, 0 \right), E_2 = \left(0, \frac{d}{c}, 0 \right). \quad (9)$$

Exclusión de una población:

$$E_3 = \left(\frac{h(ca-dn)}{bc+hmn}, \frac{ahm+bd}{bc+hmn}, 0 \right), E_4 = \left(0, \frac{dj}{cj+fg}, \frac{dg}{cj+fg} \right). \quad (10)$$

Observe que el equilibrio E_3 tiene sentido biológico si y sólo si $ca - dn > 0$.

A continuación se muestra el siguiente resultado sobre la estabilidad de los equilibrios de frontera.

Teorema 1 Para el modelo dado en (8), con los equilibrios de frontera dados en (9) y (10).

- a) Los equilibrios E_0, E_1, E_2 y E_3 son inestables para todos los valores de los parámetros del modelo.
- b) El equilibrio E_4 es localmente asintóticamente estable si y sólo si $a < \frac{njd}{cj+fg}$.

Demostración El jacobiano del modelo dado en (8) está dado por

$$J(A, H, P) = \begin{bmatrix} b\left(\frac{a}{b} - \frac{2A}{h+P}\right) - nH & -nA & \frac{bA^2}{(h+P)^2} \\ mH & d - 2Hc - fP + mA & -fH \\ 0 & gP & gH - 2jP \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Al evaluar el jacobiano dado en (11) en el equilibrio E_0 se tiene que los valores propios asociados a este caso están dados por: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$ y $\lambda_3 = 0$. Observe que existe al menos un valor propio con parte real positiva para cualquier valor de los parámetros del modelo. Por lo tanto, E_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

Evalutando el jacobiano en (11) en el equilibrio E_1 se tiene que los valores propios asociados a este caso son $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = d + \frac{ahm}{b}$ y $\lambda_3 = 0$. En este caso $\lambda_2 > 0$ para todos los valores de los parámetros del modelo. Por lo tanto, E_1 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

De manera análoga a los casos anteriores se puede demostrar que los valores propios asociados al equilibrio E_2 están dados por $\lambda_1 = -d$, $\lambda_2 = \frac{gd}{c}$ y $\lambda_3 = \frac{ac-nd}{c}$. Note que, $\lambda_2 > 0$ para todos los valores de los parámetros. Por lo tanto se puede concluir que E_2 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

Los valores propios asociados a E_3 están dados por $\lambda_3 = \frac{g(ahm+bd)}{bc+nhm}$ y las soluciones de la ecuación

$$a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

con $a_1 = (bc + nhm)$, $a_2 = (cahm + dbc + b(ca - dn))$ y $a_3 = (ca - dn)(ahm + bd)$.

Dado que $\lambda_3 > 0$ siempre se concluye que E_3 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

Finalmente, al evaluar en E_4 el jacobiano del modelo dado en (11) se tiene que los valores propios están dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \frac{(-cj - jg + \sqrt{c^2j^2 - 2gj^2c + j^2g^2 - 4g^2jf})d}{cj+fg}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \frac{(cj + jg + \sqrt{c^2j^2 - 2gj^2c + j^2g^2 - 4g^2jf})d}{cj+fg}, \\ \lambda_3 &= \frac{acj+afg-njd}{cj+fg}. \end{aligned} \quad (12)$$

En particular, λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio $P(\lambda) = (cj + fg)\lambda^2 + (jdc + jdg)\lambda + gd^2j$, el cual es un polinomio de Hurtwitz. Por lo tanto, ambas raíces son negativas. Además, $\lambda_3 < 0$ si y sólo si $a < \frac{njd}{cj+fg}$.

Por lo tanto, E_4 es localmente asintóticamente estable si y sólo si $a < \frac{njd}{cj+fg}$. \square

ESCENARIO DE COEXISTENCIA ENTRE ESPECIES

En esta sección se mostrará la existencia y estabilidad de puntos de equilibrio no triviales del modelo. Para este propósito, el campo vectorial del modelo dado en (8) se igualará a cero. Entonces, igualando a cero la tercera ecuación de (8) y resolviendo para $P \neq 0$ se obtiene

$$P = \frac{gH}{j}. \quad (13)$$

Sustituyendo el valor de P dado en (13) en las dos primeras ecuaciones de (8) se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} bA \left(\frac{a}{b} - \frac{A}{h+\frac{gH}{j}} \right) - nAH &= 0, \\ cH \left(\frac{d}{c} - H \right) - \frac{fgH^2}{j} + mA &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Al resolver la primera ecuación de (14) para A se obtienen las soluciones

$$A_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2(H) = -\frac{nh^2g}{jb} + \frac{(ag-nhj)H}{jb} + \frac{ah}{b}. \quad (15)$$

Observe que, la función $A_2(H)$ en (15) es una parábola, la cual se hace cero en $H = -\frac{hj}{g}$ y $H = \frac{a}{n}$. Además, $A_2(H)$ alcanza su máximo en $H^M = \frac{ag-nhj}{2ng}$.

Al resolver la segunda ecuación de (14) para A , se tiene

$$A_3(H) = \frac{(cj + fg)H - jd}{jm}. \quad (16)$$

La función $A_3(H)$, dada en (16), es una recta con pendiente positiva, la cual se hace cero en $H = \frac{jd}{cj+fg}$.

Al analizar el comportamiento geométrico de las funciones $A_2(H)$ y $A_3(H)$ se observan dos configuraciones posibles, las cuales se muestran en la Figura 1. Observe que las intersecciones de $A_2(H)$ y $A_3(H)$ son dos coordenadas del punto de equilibrio del modelo.

En este momento estamos en condiciones de establecer un resultado de existencia y unicidad de un equilibrio del modelo, el cual describe un escenario de coexistencia entre especies.

Teorema 2 Sea $a^* = \frac{njd}{cj+fg}$ y $E_5 = (A^*, H^*, P^*)$ cuyas coordenadas están dadas en (17). El modelo mostrado en (8) admite un único punto de equilibrio positivo si y sólo si $a > a^*$.

Demostración Analizando $A_2(H)$ y $A_3(H)$, dados en (15) y (16), se observan los tres casos mencionados a continuación. En un primer caso, si $\frac{jd}{cj+fg} < \frac{a}{n}$, entonces el punto de intersección (H^*, A^*) satisface que $H^* > \frac{jd}{cj+fg}$. Entonces, $A_3(H^*) > 0$. Por lo tanto, el equilibrio (A^*, H^*, P^*) tiene todas sus coordenadas positivas; ver Figura 1 casos (a) y (d). En un segundo caso, si $\frac{jd}{cj+fg} = \frac{a}{n}$, entonces la coordenada H^* en el punto de intersección (H^*, A^*) satisface que $H^* = \frac{jd}{cj+fg}$. Entonces, $A_3(H^*) = 0$. Por lo tanto, la coordenada A^* , en el equilibrio (A^*, H^*, P^*) , es cero; ver Figura 1 casos (b) y (e).

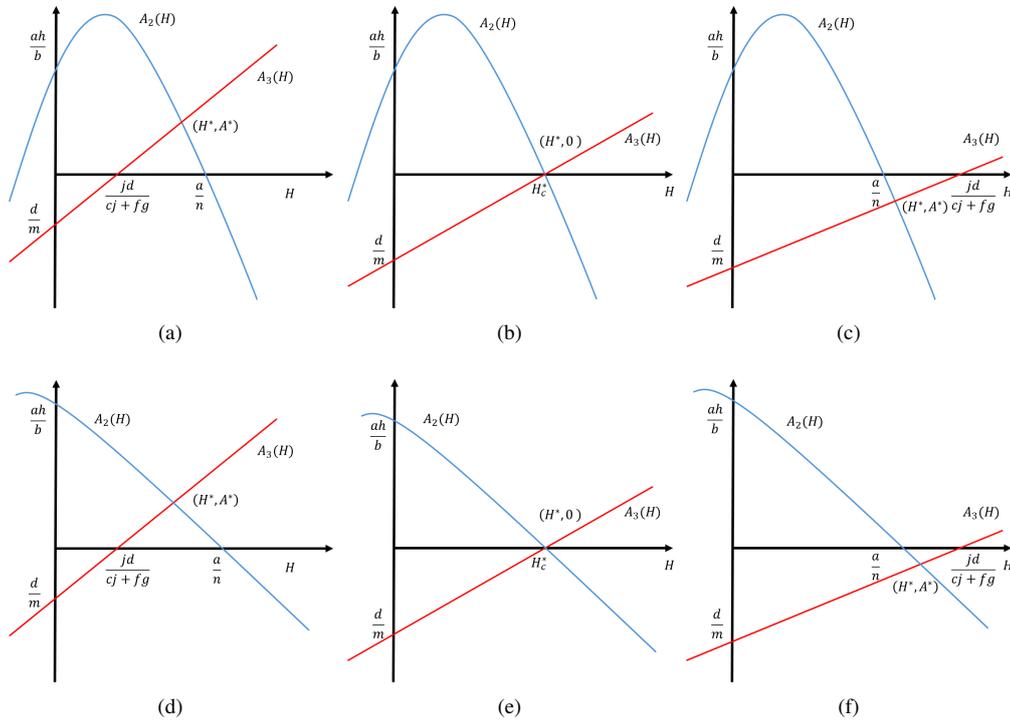


Figura 1: Los incisos (a), (b) y (c) están asociados al caso en el que $A_2'(0)$ es positivo. Estos casos muestran escenarios en los cuales $A_2(H)$ alcanza su valor máximo en un valor positivo de H . En contraste, los incisos (d), (e) y (f) están asociados al caso en el que $A_2'(0)$ es negativa. Estos casos muestran escenarios en los cuales $A_2(H)$ alcanza su valor máximo en un valor negativo de H .

En este caso, el equilibrio es un equilibrio de frontera. Finalmente, en un tercer caso, si $\frac{jd}{cj+fg} > \frac{a}{n}$, entonces el punto de intersección (H^*, A^*) satisface que $H^* < \frac{jd}{cj+fg}$. Entonces, $A_3(H^*) < 0$. Por lo tanto, la coordenada $A^* < 0$, en el equilibrio (A^*, H^*, P^*) , es negativa; ver Figura 1 casos (c) y (f). En este caso, el equilibrio no tiene sentido biológico.

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, dado en (14), para H^* y A^* y sustituyendo el valor de H^* en la ecuación para el equilibrio en P^* , dado en (13), se obtiene de manera explícita las coordenadas del equilibrio $E_5 = (A^*, H^*, P^*)$, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{\left(\frac{-ag+nhj}{jb} + \frac{cj+fg}{jm}\right) + \sqrt{\left(\frac{-ag+nhj}{jb} + \frac{cj+fg}{jm}\right)^2 + 4\left(\frac{ng}{jb}\right)\left(\frac{ah}{b} + \frac{d}{m}\right)}}{-2\left(\frac{ng}{jb}\right)}, \\ P^* &= \frac{\left(\frac{-ag+nhj}{jb} + \frac{cj+fg}{jm}\right) + \sqrt{\left(\frac{-ag+nhj}{jb} + \frac{cj+fg}{jm}\right)^2 + 4\left(\frac{ng}{jb}\right)\left(\frac{ah}{b} + \frac{d}{m}\right)}}{-2\left(\frac{n}{b}\right)}, \\ A^* &= \frac{(cj+fg)H^* - jd}{jm}. \end{aligned} \tag{17}$$

Por lo tanto, para $a > a^*$, el equilibrio $E_5 = (A^*, H^*, P^*)$ es único. \square

Observe que cuando E_5 existe el equilibrio E_4 es inestable; ver Teorema 1. Definamos $a^* = \frac{njd}{cj+fg}$. Entonces, el modelo (8) admite un único punto de equilibrio con coordenadas positivas si y sólo si $a > a^*$. En la siguiente subsección se analizará la estabilidad del equilibrio E_5 .

DIRECCIÓN DE LA BIFURCACIÓN

Conocer la dirección de la bifurcación del modelo dado en (8) en E_4 cuando $a = a^*$ permitirá concluir la existencia y estabilidad de los equilibrios que existen en una vecindad de E_4 . Castillo-Chávez and Song (2004) describen una teoría que sirve para dos propósitos: la estabilidad local de punto de equilibrio no hiperbólicos y la existencia de otros equilibrios. Para determinar la dirección de la bifurcación se tienen que calcular dos coeficientes, α y β , los cuales están asociados a la forma normal

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\alpha}{2}\gamma^2 + \beta\phi\gamma = \gamma\left(\frac{\alpha}{2}\gamma + \beta\phi\right). \tag{18}$$

La expresión explícita de α y β será calculada usando el Teorema 2 mostrado en Castillo-Chávez and Song (2004), el cual se muestra a continuación.

Teorema 3 *Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = f(x, \phi), f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}).$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que 0 es un punto de equilibrio del sistema (19) para todos los valores del parámetro ϕ . Es decir

$$f(0, \phi) \equiv 0 \text{ para todo } \phi.$$

AI : $A = D_x f(0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0)$ es la matriz linealizada del sistema (19) alrededor del equilibrio 0 con ϕ evaluando

en 0. Cero es un valor propio simple de A y todos los otros valores propios de A tienen parte real negativa.

A2: La matriz A tiene un valor propio derecho no negativo w y un vector propio izquierdo v correspondiente al valor propio cero.

Sea f_k la k -ésima componente de f y

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{k,i,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0,0), \\ \beta &= \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi}(0,0).\end{aligned}\quad (19)$$

Las dinámicas locales de (19) alrededor de 0 están determinadas totalmente por a y b .

- i) $\alpha > 0, \beta > 0$. Cuando $\phi < 0$ con $|\phi| \ll 1$, $x = 0$ es localmente asintóticamente estable, y existe un equilibrio inestable; cuando $0 < \phi \ll 1$, 0 es inestable y existe un equilibrio negativo localmente asintóticamente estable.
- ii) $\alpha < 0, \beta < 0$. Cuando $\phi < 0$ con $|\phi| \ll 1$, 0 es inestable, cuando $0 < \phi \ll 1$, 0 es localmente asintóticamente estable y existe un equilibrio positivo inestable.
- iii) $\alpha > 0, \beta < 0$. Cuando $\phi < 0$ con $|\phi| \ll 1$, 0 es inestable, y existe un equilibrio negativo localmente asintóticamente estable; cuando $0 < \phi \ll 1$, 0 es estable y aparece un equilibrio positivo inestable.
- iv) $\alpha < 0, \beta > 0$. Cuando $\phi < 0$, 0 cambia de negativo a positivo, 0 cambia su estabilidad de estable a inestable. Correspondientemente, un equilibrio negativo inestable llega a ser positivo y localmente asintóticamente estable.

A continuación se enunciará un resultado sobre la dirección de la bifurcación que presenta el modelo dado en (8) en E_4 , cuando $a = a^*$.

Teorema 4 El modelo dado en (8) presenta una bifurcación transcítica en E_4 cuando $a = a^*$.

Demostración Mostraremos que los coeficientes dados en (19) para el modelo propuesto satisfacen las condiciones dadas en iv) para $a^* = \frac{njd}{cj+fg}$. La linealización del modelo alrededor del equilibrio E_4 está dado por

$$J(E_1, a^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{mjd}{cj+fg} & -\frac{jdc}{cj+fg} & -\frac{fjd}{cj+fg} \\ 0 & \frac{g^2d}{cj+fg} & -\frac{gjd}{cj+fg} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

El jacobiano dado en (20) tiene asociado los valores propios $\lambda_1 = 0$ y los dados por las raíces del polinomio característico $F(\lambda) = \lambda^2 + \frac{j d(g+c)\lambda}{c j+f g} + \frac{g d^2 j}{c j+f g}$. Dado que sus coeficientes son positivos, se satisface el criterio de Routh-Hurwitz. Por lo tanto los otros dos valores propios tienen parte real negativa.

Al calcular los vectores propios derecho e izquierdo asociados a $\lambda_1 = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}w &= \left[\frac{cj+fg}{gm}, \frac{j}{g}, 1 \right]^T, \\ v &= \left[\frac{gm}{cj+fg}, 0, 0 \right],\end{aligned}\quad (21)$$

respectivamente. Note que $v \cdot w = 1$. Considerando el modelo dado en (8), y las derivadas mencionadas en el Teorema 3, las únicas derivadas no cero están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_1}{\partial A^2} &= -\frac{2b}{\left(h + \frac{dg}{cj+fg}\right)}, \\ 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial A \partial H} &= -2n.\end{aligned}\quad (22)$$

Utilizando los vectores y las derivadas mostradas en (21) y (22), respectivamente, los coeficientes α y β están dados por

$$\alpha = -\frac{2(cj+fg)b}{gm\left(h + \frac{dg}{cj+fg}\right)} - \frac{2jn}{g} < 0,$$

$$\beta = 1 > 0.$$

Al aplicar el caso iv) en el Teorema 3 se concluye que la dirección de la bifurcación es hacia adelante. Por lo tanto el modelo presenta una bifurcación transcítica en E_4 cuando $a = a^*$. \square

Por lo tanto, si $a < a^*$, E_4 es localmente asintóticamente estable. En contraste, si $a > a^*$, entonces E_5 aparece y es localmente asintóticamente estable mientras que E_4 es inestable. En este caso, E_5 tiene sentido biológico, entonces un escenario de coexistencia entre las tres especies es posible. La Figura 2 muestra el diagrama de bifurcación asociado al modelo propuesto.

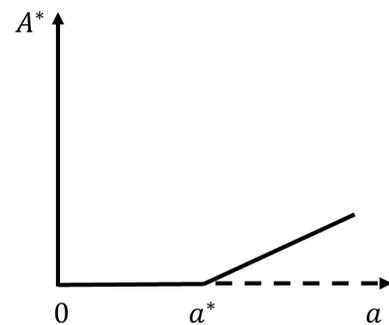


Figura 2: Diagrama de bifurcación asociado al modelo dado en (8)

A continuación se mostrarán simulaciones numéricas de las soluciones del modelo para ilustrar los resultados obtenidos.

SIMULACIONES NUMÉRICAS DE LAS SOLUCIONES DEL MODELO

En esta sección se muestran simulaciones numéricas de las soluciones del modelo para diferentes valores de sus parámetros. De acuerdo al Teorema 4, el modelo presenta una

bifurcación transcítica en $a = a^*$. A continuación se mostrarán ejemplos para los cuales $a < a^*$ y $a > a^*$.

Para ejemplificar el escenario en el que las algas son excluidas del sistema ($a < a^*$), los valores de los parámetros del modelo están dados por $a = 0.20, b = 0.2, h = 1, n = 0.4, d = 10, c = 7.1, m = 0.05, g = 0.8, j = 0.2, y f = 0.2$. Con estos valores de los parámetros $a^* = \frac{njd}{cj+fg} = 0.51$. Observe que $a < a^*$, por lo tanto, no existen puntos de equilibrio donde $A^* > 0$ y el equilibrio E_4 es localmente asintóticamente estable. La Figura 3 muestra que para distintas condiciones iniciales, las soluciones del modelo convergen al equilibrio E_4 , en que las algas se extinguen y los peces y los pescadores coexisten. Para los valores de los parámetros usados, el equilibrio que describe un escenario de coexistencia entre las tres especies no existe. Los puntos de equilibrio de exclusión de dos o todas las poblaciones son

$$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = (1.03, 0, 0), \text{ y } E_2 = (0, 1.4, 0).$$

El equilibrio de exclusión de una población es

$$E_4 = (0, 1.26, 5.06).$$

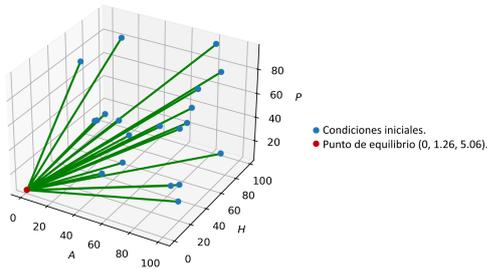


Figura 3: Soluciones del modelo propuesto muestran que la población de algas es excluida. Observe que para diferentes condiciones iniciales las soluciones convergen al equilibrio E_4 .

Para mostrar el escenario en el que coexisten las tres especies ($a > a^*$) se usarán los mismos valores de los parámetros que los usados en la Figura 3, excepto que el valor de a es cambiado. Para este caso, $a = 4.506329114$, entonces la condición de existencia del equilibrio no trivial dada por $a > a^*$ se cumple. En este escenario, el equilibrio E_2 es inestable mientras que el equilibrio E_5 es localmente asintóticamente estable. La Figura 4 muestra que las soluciones del modelo convergen a un equilibrio no trivial, el cual describe un escenario de coexistencia entre las tres poblaciones. En este escenario los puntos de equilibrio de frontera de exclusión de dos poblaciones o todas están dados por:

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_1 = (22.53, 0, 0), \quad E_2 = (0, 1.40, 0).$$

Los equilibrios de exclusión de una población están dados por:

$$E_3 = (19.44, 1.544, 0) \quad E_4 = (0, 1.26, 5.06).$$

El punto de equilibrio interior es

$$E_4 = (0, 1.26, 5.06).$$

Observe que en este caso, $H^M = \frac{ag-nhj}{2ng} = 5.507911390$. Por lo tanto, $H^* < H^M$. Así que la intersección de $A_2(H)$ y $A_3(H)$ ocurre a la izquierda del máximo de $A_3(H)$.

Finalmente, se mostrará un ejemplo en el que la intersección de $A_2(H)$ y $A_3(H)$ ocurre a la derecha del máximo de $A_3(H)$. Para este propósito, se considera que $c = 0.1$ y $a = 8.44$. Para este nuevo valor de c , $a^* = 4.44$. Los demás valores de los parámetros son los mismo que los usados para simular el escenario dado en la Figura 4. En este caso, los puntos de equilibrio están dados por

$$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = (42.22, 0, 0), E_2 = (0, 100, 0).$$

El equilibrio en que una población es excluida está dado por

$$E_4 = (0, 11.11, 44.44).$$

El equilibrio de coexistencia de las tres especies es

$$E_5 = (162.09, 20.11625128, 80.46).$$

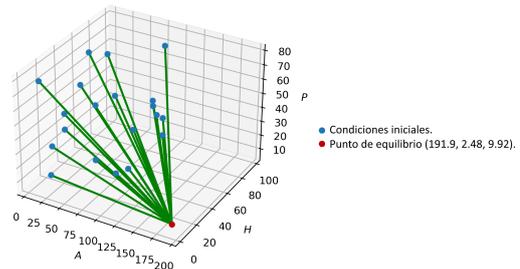


Figura 4: Soluciones del modelo muestran que las tres especies pueden coexistir. Note que soluciones del modelo con diferentes condiciones iniciales convergen al equilibrio E_4 .

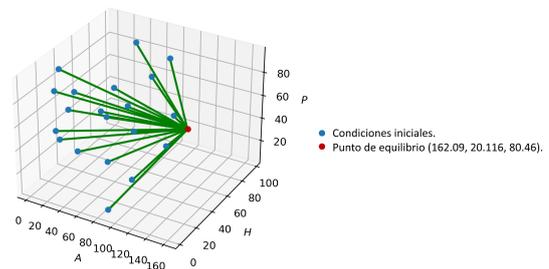


Figura 5: Soluciones del modelo propuesto muestran que las tres especies pueden coexistir. Note que soluciones del modelo con diferentes condiciones iniciales convergen al equilibrio E_4 .

DISCUSIÓN

Actualmente las actividades humanas están expandiéndose en los ecosistemas terrestres y marinos, lo cual puede ser catastrófico para ellos. Si bien se han realizado modelos donde se tienen en cuenta factores como la industrialización en

bosques, los efectos negativos del turismo en ecosistemas y en las especies que habitan en ellos, e incluso modelos que analizan la dinámica de arrecifes de coral en presencia de actividades pesqueras, no existen muchos trabajos que analicen efectos humanos en ecosistemas marinos. En este trabajo se propuso un modelo matemático que describe la interacción entre algas, peces herbívoros y efectos antropogénicos en ecosistemas marinos. El análisis de existencia y estabilidad de puntos de equilibrio del modelo dado por (8) permite concluir los siguientes resultados:

- La extinción de las tres poblaciones es prácticamente imposible (el punto E_0 es inestable para todos los valores de los parámetros).
- Escenarios en los que solamente existan algas o solamente existan peces herbívoros no puede ocurrir (los puntos E_1 y E_2 son inestables para todos los valores de los parámetros).
- Un escenario en el que coexistan solamente algas y peces no puede ocurrir ya que el punto E_3 es inestable para todos los valores de los parámetros.
- Un escenario en que las algas son excluidas y los peces junto con las actividades humanas persisten es posible. Esto ocurre ya que E_4 es localmente asintóticamente estable bajo algunas condiciones específicas sobre los parámetros del modelo.
- Un escenario de coexistencia entre las tres especies es posible. Esto se concluye de que bajo ciertas condiciones sobre los parámetros del modelo el equilibrio E_5 es localmente asintóticamente estable.

Con estos resultados resulta necesario observar la condición necesaria para la existencia de E_5 y la inestabilidad de E_4 dada por $a^* = \frac{njd}{cj+fg}$.

Al tener en consideración que la existencia y estabilidad de los puntos E_4 y E_5 depende de si a es mayor, menor o igual que a^* , resultó útil ocupar la teoría de la variedad central y formas normales para poder obtener condiciones necesarias para la existencia y estabilidad del punto E_5 . Al analizar la configuración de las funciones $A_2(H)$ y $A_3(H)$ dadas en la Figura 1 se observa lo siguiente.

- Si existe un equilibrio en coexistencia ($a > a^*$) y $A_2'(0) > 0$, entonces para que la población de algas decrezca o se extinga es necesario que el control de las actividades antropogénicas sea tan estricto que el equilibrio ocurra a la derecha del máximo de $A_2(H)$; ver Figura 1, incisos (a), (b) y (c).
- Si existe un equilibrio en coexistencia ($a > a^*$) y $A_2'(0) < 0$, entonces la población de algas decrece para cualquier intensidad del control de las actividades antropogénicas, llegando a la extinción para un control suficientemente estricto; ver Figura 1, incisos (d), (e) y (f).

El análisis del modelo propuesto muestra que las actividades antropogénicas juegan un papel fundamental en el control o erradicación de la población de algas, las cuales al crecer producen efectos negativos en los ecosistemas marinos. Si bien, las actividades turísticas son importantes para el desarrollo de comunidades humanas, tener claridad sobre sus efectos en las poblaciones de algas y peces herbívoros es fundamental en cuestiones de biodiversidad ya que estas afectan algunos atractivos turísticos.

REFERENCIAS

- Agarwal, M., Fatima, T. and Freedman, H. (2010) 'Depletion of forestry resource biomass due to industrialization pressure: A ratio-dependent mathematical model'. *Journal of Biological Dynamics*, 4.
- Bauman, A., Burt, J., Feary, D., Marquis, E. and Usseglio, P. (2010) 'Tropical harmful algal blooms: An emerging threat to coral reef communities?'. *Marine pollution bulletin*, 60(11), pp. 2117–2122.
- Brown, K., Bender-Champ, D., Bryant, D., Dove, S. and Hoegh-Guldberg, O. (2017) 'Human activities influence benthic community structure and the composition of the coral-algal interactions in the central maldives'. *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology*, 497, pp. 33–40.
- Casagrandi, R. and Rinaldi, S. (2002) 'A theoretical approach to tourism sustainability'. *Conservation ecology*, 6(1).
- Castillo-Chávez, C. and Song, B. (2004) 'Dynamical models of tuberculosis and their applications'. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 1(2), pp. 361–404.
- Chatterjee, S. (2017) 'An analysis of threats to marine biodiversity and aquatic ecosystems'. Available at SSRN 2964468.
- Davidson, K., Gowen, R., Harrison, P., Fleming, L., Hoagland, P. and Moschonas, G. (2014) 'Anthropogenic nutrients and harmful algae in coastal waters'. *Journal of environmental management*, 146, pp. 206–216.
- Diop, O. and Séne, A. (2016) 'Mathematical model of the dynamics of fish, waterbirds and tourists in the djoudj national park, senegal'. *Acta biotheoretica*, 64(4), pp. 447–468.
- Diop, O. and Séne, A. (2018) 'Mathematical model of fish, birds and tourists in wetlands: the impact of periodic fluctuations on the coexistence of species'. *Afrika Matematika*, 29, pp. 841–859.
- Dubey, B. (1997) 'Modelling the depletion and conservation of resources: Effects of two interacting population'. *Ecological Modeling*, 101.
- Dubey, B. (2012) 'Modeling the effects of two interacting populations on a renewable resource'. *Natural Resource Modeling*, 25.
- Dubey, B. and Das, B. (1999) 'Models for the survival of species dependent on resource in industrial environment'. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 231(2).
- Dubey, B. and Hussain, J. (2003) 'Nonlinear models for the survival of two competing species dependent on resource in industrial environments'. *Nonlinear Analysis: Real World Application*, 4.
- Dubey, B., Sharma, S., Sinha, P. and Shukla, J. (2009) 'Modelling the depletion of forestry resources by population and population pressure augmented industrialization'. *Applied Mathematical Modelling*, 33.
- Dubey, B., Upadhyay, R. and Hussain, J. (2003) 'Effects of industrialization and pollution on resource biomass: A mathematical model'. *Ecological Modelling*, 167.
- Eastwood, E., Clary, D. and Melnick, D. (2017) 'Coral reef health and management on the verge of a tourism boom: A case study from miches, dominican republic'. *Ocean & Coastal Management*, 138, pp. 192–204.
- Fabricius, K. (2005) 'Effects of terrestrial runoff on the ecology of corals and coral reefs: review and synthesis'. *Marine pollution bulletin*, 50(2), pp. 125–146.
- Gil, M., Renfro, B., Figueroa-Zavala, B., Penié, I. and Dunton, K. (2015) 'Rapid tourism growth and declining coral reefs in akumal, mexico'. *Marine biology*, 162, pp. 2225–2233.
- Hallegraeff, G. (1993) 'A review of harmful algal blooms and their apparent global increase'. *Phycologia*, 32(2), pp. 79–99.
- Jyotsna, K. and Tandon, A. (2017) 'A mathematical model studying the survival of forest resource-dependent wildlife population in the presence

- of population pressure-induced mining activities'. *Natural Resource Modeling*, 30(4), p. e12139.
- Lachs, L. and Oñate-Casado, J. (2020) 'Fisheries and tourism: Social, economic, and ecological trade-offs in coral reef systems'. In *YOUUMA-RES 9-The Oceans: Our Research, Our Future: Proceedings of the 2018 conference for YOUng MARine REsearcher in Oldenburg, Germany*. Springer International Publishing, pp. 243–260.
- Lacitignola, D., Petrosillo, I., Cataldi, M. and Zurlini, G. (2007) 'Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability'. *Ecological modelling*, 206(1-2), pp. 191–204.
- Lapointe, B., Barile, P., Littler, M. and Littler, D. (2005) 'Macroalgal blooms on southeast florida coral reefs: II. cross-shelf discrimination of nitrogen sources indicates widespread assimilation of sewage nitrogen'. *Harmful Algae*, 4(6), pp. 1106–1122.
- Leitão, M., Hackradt, C., Lima, S., Ciancio, J. and Félix-Hackradt, F. (2023) 'Effect of human impact on coral reef herbivorous fish niche'. *Marine Biology*, 170(59).
- López-Jiménez, I., Flórez-Leiva, L. and Quan-Young, L. (2020) 'Influencia de la herbivoría sobre la interacción alga-coral en un arrecife coralino de bahía capurganá, caribe colombiano'. *Revista de Biología Tropical*, 68(3), pp. 729–742.
- Misra, A. and Lata, K. (2015) 'Depletion and conservation of forestry resources: A mathematical model'. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 23.
- Misra, A., Lata, K. and Shukla, J. (2014a) 'Effects of population and population pressure on forest resources and their conservation: A modeling study'. *Environmental Development and Sustainability*, 16.
- Misra, A., Lata, K. and Shukla, J. (2014b) 'A mathematical model for the depletion of forestry resources due to population and population pressure augmented industrialization'. *International Journal of Modeling*, 5.
- Quintero, S., Machuca, V., Cotto, H., Bradley, M. and Rios-Soto, K. (2016) 'A mathematical model of coral reef response to destructive fishing practices with predator-prey interactions'. *Tech. rep., Arizona State University*.
- Redding, J., Myers-Miller, R., Baker, D., Fogel, M., Raymundo, L. and Kim, K. (2013) 'Link between sewage-derived nitrogen pollution and coral disease severity in guam'. *Marine Pollution Bulletin*, 73, pp. 57–63.
- Shukla, J., Freedman, H., Pal, V., Misra, O., Agarwal, M. and Shukla, A. (1989) 'Degradation and subsequent regeneration of a forestry resource'. *Ecological Modelling*, 44.
- Shukla, J., Lata, K. and Misra, A. (2011) 'Modeling the depletion of a renewable resource by population and industrialization: Effect of technology on its conservation'. *Natural Resource Modeling*, 24.
- Shukla, J., Misra, O., Agarwal, M. and Shukla, A. (1988) 'Effect of pollution and industrial development on degradation of biomass-resource: A mathematical model with reference to doon valley'. *Mathematical and Computer Modelling*, 11.
- Vikas, M. and Dwarakis, G. (2015) 'Coastal pollution: A review'. *Aquatic Procedia*, 4, pp. 381–388.
- Villavicencio-Pulido, J., Vázquez-Hipólito, V. and García-Cruz, G. (2023) 'Catastrophic or sustainable scenarios might occur when the carrying capacities of a tourism-based socioecological system vary'. *Natural Resource Modeling*, 36(2).
- Zikkah, R., Anggriani, N. and Supriatna, A. (2020a) 'Mathematical model of coral reefs with fish harvesting effect'. *Journal of Physics: Conference Series*, 1657, pp. 1–7.
- Zikkah, R., Pratama, M., Anggriani, N. and Supriatna, A. (2020b) 'A mathematical model of coral reef response to destructive fishing considering some biological interactions'. *AIP Conference Proceedings*, 2264, pp. 050001–12.

Citación recomendada: Rios-Carrillo, L.H. et al. (2024). 'Actividades antropogénicas moderadas propician un ecosistema marino sostenible'. *Rev. model. mat. sist. biol.* Vol., e24R02, doi:10.58560/rmmsb.v04.e.024.02



This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution International (CC BY 4.0) <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>. Support: NA